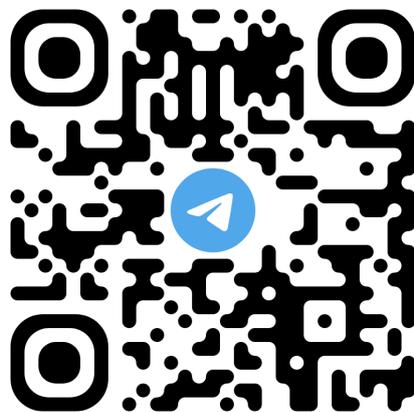


Università di Pisa - Dipartimento di Matematica

Geometria 2

MATTIA SALVADORI

m.salvadori23@studenti.unipi.it



Rielaborazione delle lezioni dei professori
R. Frigerio, M. Talpo e A. Maffei

a.a. 2021/2022

INDICE

Prefazione	vi
1 Geometria Proiettiva	1
1.0 Introduzione e prime definizioni	1
1.1 Trasformazioni proiettive	2
1.2 Sottospazi proiettivi	4
1.3 Sistemi di punti	6
1.4 Coordinate omogenee	8
1.5 Carte affini e punti all'infinito	11
Esercizi I settimana	13
1.6 Curve algebriche piane	15
1.7 Curve proiettive piane	16
1.8 Equivalenza affine/proiettiva di curve	18
1.9 Classificazione proiettiva delle coniche	19
Esercizi II settimana	21
1.10 Curve affini vs curve proiettive	22
1.11 Rette tangenti e molteplicità di intersezione	25
Esercizi III settimana	28
1.12 Punti lisci e singolari	30
1.13 Punti singolari e gradiente	31
1.14 Calcolo di tangenti principali con sviluppo di Taylor	34
Esercizi IV settimana	37
Esercizi V settimana	40
2 Topologia Generale	41
2.1 Spazi metrici e topologici	41
2.2 Chiusura e parte interna	47
2.3 Topologie più o meno fini	48
2.4 Basi e prebasi	49
Esercizi VI settimana	52
2.5 Intorni	53
2.6 Successioni e limiti in spazi topologici	55
2.7 Sottospazi topologici	57
2.8 Proprietà topologiche ereditate dai sottospazi	59
2.9 Mappe aperte e chiuse	61

2.10 Immersioni topologiche	62
Esercizi VII settimana	63
2.11 Prodotti topologici	64
2.12 Topologia della convergenza puntuale	68
2.13 Assiomi di separazione	69
Esercizi VIII settimana	74
2.14 Ricoprimenti fondamentali	76
2.15 Connessione e connessione per archi	79
Esercizi IX settimana	82
2.16 Componenti connesse e connesse per archi	83
2.17 Compattezza	87
Esercizi X settimana	89
2.18 Sottospazi	91
2.19 Proiezione stereografica	92
2.20 Compattezza dei prodotti	94
2.21 Compattificazione di Alexandroff (o a un punto)	96
2.22 Compattezza in spazi metrici	97
Esercizi XI settimana	100
2.23 Numero di Lebesgue e Uniforme continuità	101
2.24 Topologia quoziente	103
2.24.1 Quozienti per azioni di gruppi	106
Esercizi I settimana	112
2.25 Topologia dei proiettivi	113
2.25.1 Caso reale	113
2.25.2 Proiettivi reali in dimensione bassa	114
2.25.3 Caso complesso	115
2.25.4 Proiettivi complessi in dimensione bassa	116
2.25.5 Ultime proprietà dei proiettivi	116
Esercizi II settimana	118
3 Gruppo Fondamentale e Rivestimenti	119
3.1 Teoria dell'omotopia	119
3.2 Il funtore π_0	122
3.3 Retratti e retratti di deformazione	123
3.3.1 Importante esempio di retratto	123
3.4 Gruppo fondamentale (o Primo gruppo di omotopia)	124
3.5 Bouquet (o Wedge) di spazi topologici (Esercizi II settimana)	126
3.6 Cammini in $\Omega(x_0, x_0)$ e mappe $S^1 \rightarrow X$ (Esercizi III settimana)	128
3.7 Il funtore π_1	130
3.7.1 Dipendenza del π_1 dal punto base	131
3.8 Invarianza del π_1 per equivalenze omotopiche non puntate	132
3.9 Rivestimenti	133
Esercizi IV settimana	135
3.10 Teoria dei sollevamenti	136
3.11 Azione di monodromia	139
3.12 $\pi_1(S^1)$	140
3.13 Teorema del punto fisso di Brouwer	141
3.14 Teorema di Van Kampen	142
3.15 Prodotto libero	146
3.16 Il π_1 degli spazi proiettivi complessi	149
3.17 Prodotto amalgamato	150
3.18 Presentazioni di gruppi	151
3.19 Gruppo fondamentale del toro	152
3.20 Caso delle superfici di genere $g \geq 2$	153

3.21	Rivestimento universale	155
3.22	Morfismi di rivestimento	157
	Esercizi VI settimana	161
	Esercizi VII settimana	162
4	Funzioni Olomorfe	163
4.1	Serie di potenze e funzioni analitiche	168
4.2	Prolungamento analitico e domini massimali	172
4.3	Integrazione di 1-forme	175
4.3.1	Integrazione lungo curve C^1 a tratti	175
4.4	Criteri per l'esattezza di una 1-forma	177
4.5	Teorema di Cauchy	179
	Esercizi VIII settimana	183
4.6	Teorema di Liouville	186
4.7	Principio della media	187
4.8	Principio del massimo	187
4.9	Singularità	188
4.10	Residuo di una funzione in un punto singolare	192
4.11	Teorema della mappa aperta	194
4.12	Calcolo degli integrali definiti	195
	Esercizi IX settimana	196
	Esercizi X settimana	200
	Indice Analitico	203

PREFAZIONE

Questo elaborato comprende tutte le lezioni del corso di Geometria 2 dell'a.a. 2021/2022 tenuto dai suddetti professori.

La realizzazione di questo enorme documento è stata molto impegnativa ma, al contempo, davvero soddisfacente: spero tantissimo che vi possa essere utile.

Ringrazio particolarmente SABRINA BOTTICCHIO che è stata fondamentale con il suo eccellente, puntuale e immancabile lavoro di correzione in itinere di ogni singola pagina.

Ringrazio vivamente GIOVANNI MARZENTA per la sua precisissima correzione dell'intero elaborato, anche e soprattutto dal punto di vista tecnico-stilistico (lavoro che ho apprezzato particolarmente) e, allo stesso modo, LORENZO MONTANA che mi ha aiutato a ottimizzare queste dispense, riducendo notevolmente il numero di pagine e riorganizzando in maniera molto più efficace i contenuti e lo stile. Infine, ci tengo a ringraziare tutti coloro che mi hanno segnalato errori, suggerimenti di modifica per maggiore chiarezza e correzioni varie tra i quali ANDREA ROCCA ha spiccato considerevolmente: grazie davvero!

Non mi resta che augurarvi...

Buona lettura!

Mattia

GEOMETRIA PROIETTIVA

1.0 Introduzione e prime definizioni

Lo **spazio proiettivo** nasce storicamente col completamento (o “compattificazione”) dello spazio affine, cui si aggiungono “punti all’infinito” nei quali si incontrano rette affini parallele. Nelle prossime lezioni daremo un senso a queste parole, chiarendo come l’impianto appena descritto si possa interpretare tramite le seguenti definizioni:

Definizione 1.0.1. Lo **spazio proiettivo** associato a un \mathbb{K} -spazio vettoriale V è

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim$$

dove $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $v = \lambda w$.

In altre parole, $\mathbb{P}(V)$ è l’insieme delle rette (= sottospazi vettoriali 1-dimensionali) di V :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \longleftrightarrow & \text{rette di } V \\ [v] & \longmapsto & \text{Span}\langle v \rangle \\ [v] & \longleftarrow & r \\ & & \text{generatore} \\ & & \text{qualsiasi di } r \end{array}$$

Definizione 1.0.2. $\dim \mathbb{P}(V) := \dim_{\mathbb{K}}(V) - 1$.

Attenzione! $\mathbb{P}(V)$ non è uno spazio vettoriale.

Esempio 1. Se $V = \{0\}$, allora $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ e dunque \emptyset è uno spazio proiettivo di dimensione

$$\dim\{0\} - 1 = 0 - 1 = -1$$

Esempio 2. Se $\dim V = 1$, allora tutti gli elementi di $V \setminus \{0\}$ sono equivalenti tra loro, $|\mathbb{P}(V)| = 1$ e $\dim \mathbb{P}(V) = 1 - 1 = 0$, dunque uno spazio proiettivo di dimensione 0 è un punto.

Esempio 3. Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $V = \mathbb{K}^2$, allora $\dim \mathbb{P}(\mathbb{K}^2) = 2 - 1 = 1$. Poiché $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, dati $v, w \in \mathbb{K}^2$, $v \sim w \iff v = w$, perciò

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^2) = \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} \text{ e quindi } |\mathbb{P}(V)| = 3$$

Notazioni/Terminologia: uno spazio proiettivo di dimensione 1 si chiama **retta proiettiva**; invece uno di dimensione 2 si chiama **piano proiettivo**. Se $V = \mathbb{K}^n$, allora $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ si indica spesso con $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \implies \dim \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) = n - 1$.

D’ora in poi tutti gli spazi proiettivi considerati avranno dimensione finita, cioè saranno $\mathbb{P}(V)$ con $\dim V < +\infty$.

1.1 Trasformazioni proiettive

Definizione 1.1.1. Data $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ funzione tra spazi proiettivi, allora f si dice **trasformazione proiettiva**, se $\exists \varphi : V \rightarrow W$ lineare tale che $f([v]) = [\varphi(v)] \forall v \in V \setminus \{0\}$. In tal caso f si dice **indotta da φ** .

Osservazione 1. Se f è una trasformazione proiettiva indotta da φ , allora φ è iniettiva.

Infatti, se $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$, allora $\exists v \in \text{Ker } \varphi \setminus \{0\}$ tale che $[\varphi(v)] = [0]$, ma non esiste, mentre $f([v])$ avrebbe senso, per cui $f([v]) = [\varphi(v)]$ non varrebbe $\forall v \in V \setminus \{0\}$.

Osservazione 2. Se $\varphi : V \rightarrow W$ è lineare e iniettiva, allora φ induce $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ definita da $f([v]) = [\varphi(v)] \forall v \in V \setminus \{0\}$.

Dobbiamo solo controllare la buona definizione di f , cioè che $v \sim w \implies \varphi(v) \sim \varphi(w)$ ¹. Questa condizione è banalmente verificata: $v \sim w \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che

$$v = \lambda w \implies \varphi(v) = \varphi(\lambda w) = \lambda \varphi(w) \implies \varphi(v) \sim \varphi(w)$$
³

Osservazione 3. Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

Infatti, sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ indotta da φ (d'ora in poi scriveremo $f = [\varphi]$). Abbiamo appena visto che φ è necessariamente iniettiva.

Siano $v, w \in V \setminus \{0\}$, supponiamo $f([v]) = f([w])$, perciò $[\varphi(v)] = [\varphi(w)] \implies \varphi(v) = \lambda \varphi(w)$, con $\lambda \in \mathbb{K}^* \implies$ ⁴ $\varphi(v) = \varphi(\lambda w) \implies$ ⁵ $v = \lambda w \implies [v] = [w]$, dunque f è iniettiva.

Proposizione 1.1.1. $\text{Id} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è una trasformazione proiettiva $\forall \mathbb{P}(V)$.

Proposizione 1.1.2. Se $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$, $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ sono trasformazioni proiettive, allora anche $g \circ f$ lo è.

Dimostrazione. (**Proposizione 1.1.1**) $\text{Id} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è indotta da $\text{Id} : V \rightarrow V$ che è, ovviamente, lineare e iniettiva.

(**Proposizione 1.1.2**) Se $f = [\varphi]$, con $\varphi : V \rightarrow W$ lineare, e $g = [\psi]$, con $\psi : W \rightarrow Z$ lineare, allora $g \circ f$ è indotta da $\psi \circ \varphi$, in quanto $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $g \circ f([v]) = g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))]$ e, infine, $\psi \circ \varphi$ è lineare e iniettiva in quanto composizione di funzioni lineari e iniettive. \square

Proposizione 1.1.3. Data $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva, sono fatti equivalenti:

- ① f è surgettiva;
- ② f è bigettiva;
- ③ $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$;
- ④ f è invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è una trasformazione proiettiva.

Una f con le precedenti proprietà si chiama **isomorfismo proiettivo**.

Dimostrazione. Poiché f è necessariamente iniettiva, si ha (① \iff ②).

(② \implies ③) Data f bigettiva, mostriamo che, detta $\varphi : V \rightarrow W$ una mappa lineare che induce f , anche φ è bigettiva. Già sappiamo che è iniettiva. Dato $w \in W$, se $w = 0$, ovviamente $w \in \text{Imm } \varphi$, altrimenti, per surgettività di f , $\exists v \in V \setminus \{0\}$ tale che $[w] = f([v]) = [\varphi(v)]$, cioè $w = \lambda \varphi(v)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}^*$, da cui $w = \varphi(\lambda v)$ e $w \in \text{Imm } \varphi$, dunque $\varphi : V \rightarrow W$ è surgettiva. Perciò, essendo φ un isomorfismo lineare, $\dim V = \dim W$, da cui $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W)$.

¹Più pedantemente, se $[v] = [w]$, cioè $v \sim w$, allora $f([v]) = f([w])$, cioè $[\varphi(v)] = [\varphi(w)]$, ossia $\varphi(v) \sim \varphi(w)$.

² φ è lineare.

³Avremmo dovuto pure controllare che in effetti $[\varphi(v)]$ esista $\forall v \neq 0$, ma questo è proprio dovuto all'iniettività di φ .

⁴ φ è lineare.

⁵ φ è iniettiva.

(③ \implies ④) Data $f = [\varphi]$, con $\varphi : V \longrightarrow W$ lineare, visto che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$, segue che $\dim V = \dim W$, per cui, essendo φ iniettiva, φ è un isomorfismo lineare, perciò $\exists \varphi^{-1} : W \longrightarrow V$ lineare inversa di φ . È immediato verificare che $[\varphi^{-1}] : \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ sia l'inversa di f (ed è, per costruzione, una trasformazione proiettiva).

(④ \implies ① (o ②)) È ovvia. □

Una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ ⁶ si chiama **proiettività** ed è automaticamente un isomorfismo proiettivo, per la **Proposizione 1.1.3**. Poiché la composizione di proiettività è una proiettività, l'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è un gruppo ⁷, denotato con $\boxed{\mathbb{P}\mathcal{GL}(V)}$ ⁸. Mostriamo infatti che, se $\varphi, \varphi' : V \longrightarrow W$ inducono entrambe $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$, allora $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $\varphi = \lambda\varphi'$.

Osservazione 4. *I punti fissi di una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ sono in biiezione con gli autospazi 1-dimensionali di $\varphi : V \longrightarrow V$, dove φ è una mappa lineare che induce f .*

Infatti,

$$f([v]) = [v] \iff \varphi(v) = \lambda v$$

Esercizio 1. *Se $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ è proiettività tra spazi proiettivi su \mathbb{R} , con $\dim \mathbb{P}(V)$ pari, allora f ha (almeno) un punto fisso.*

Dimostrazione. Data $f = [\varphi]$, con $\varphi : V \longrightarrow V$ lineare, per ipotesi, $\dim V = \dim \mathbb{P}(V) + 1$ è dispari, per cui il polinomio caratteristico di φ ha grado dispari ed ammette (almeno) una radice. Dunque φ ha (almeno) un autovalore e f ha (almeno) un punto fisso. □

Con la stessa dimostrazione si vede che ogni proiettività $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha (almeno) un punto fisso.

⁶Siamo nel caso di $V = W$.

⁷Usiamo anche che sono degli isomorfismi.

⁸Per ragioni che saranno ovvie successivamente.

1.2 Sottospazi proiettivi

Definizione 1.2.1. Un **sottospazio proiettivo** di $\mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ tale che, se $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è la proiezione, allora $S = \pi(H \setminus \{0\})$ per qualche sottospazio vettoriale H di V .

Per costruzione, S è esso stesso uno spazio proiettivo e $\dim S = \dim H - 1$.

Spesso si indica S con $\mathbb{P}(H)$.

C'è una bigezione tra i sottospazi vettoriali di V e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ssp vett di } V\} & \longleftrightarrow & \{\text{ssp proiett di } \mathbb{P}(V)\} \\ H & \xrightarrow{\alpha} & \pi(H \setminus \{0\}) \\ \pi^{-1}(S) \cup \{0\} & \xleftarrow{\beta} & S \end{array}$$

Esercizio 2. È facile verificare che α e β siano una l'inversa dell'altra.

Proposizione 1.2.1. Dati S_i , con $i \in I$, sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, $\bigcap_{i \in I} S_i$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. $\forall i \in I$ sia $H_i \subseteq V$ il sottospazio vettoriale tale che $S_i = \mathbb{P}(H_i) = \pi(H_i \setminus \{0\})$. Dunque

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} \pi(H_i \setminus \{0\}) = \pi\left(\bigcap_{i \in I} (H_i \setminus \{0\})\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right) \text{ è un sottospazio proiettivo. } \quad \square$$

In generale, come accade per i sottospazi vettoriali, l'unione di sottospazi non è un sottospazio, per cui si rende necessaria la seguente nozione.

Definizione 1.2.2. Il **sottospazio generato** da $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ (o **sottospazio somma**) è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene A e si indica con $L(A)$.

$$L(A) \text{ è ben definito: si ha infatti } L(A) = \bigcap_{\substack{S \supseteq A \\ S \text{ ssp}}} S.$$

Per quanto visto sopra, $\bigcap_{\substack{S \supseteq A \\ S \text{ ssp}}} S$ è un sottospazio e, per costruzione, è chiaramente contenuto in qualsiasi

sottospazio che contiene A ⁹.

Dati i sottospazi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$, spesso $L(S_1 \cup S_2)$ si indica con

$$L(S_1, S_2) = \text{“sottospazio generato da } S_1 \text{ ed } S_2\text{”}$$

Proposizione 1.2.2. Se $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$ sono sottospazi di $\mathbb{P}(V)$, allora

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

Dimostrazione. Dal momento che $H_1 \subseteq H_1 + H_2$, $S_1 = \mathbb{P}(H_1) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ e, analogamente, anche $S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$, dunque $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$, per cui, per la minimalità del sottospazio generato, $L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$. D'altro canto, $L(S_1 \cup S_2) = \mathbb{P}(H)$ per qualche sottospazio vettoriale $H \subseteq V$. $S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \implies H_1 = \pi^{-1}(S_1) \cup \{0\} \subseteq \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\} = H$ e, allo stesso modo, anche $H_2 \subseteq H$, ma H è un sottospazio vettoriale, per cui (vedasi corso di **Geometria 1**)

$$H_1 + H_2 \subseteq H \implies \mathbb{P}(H_1 + H_2) \subseteq \mathbb{P}(H) = L(S_1, S_2)$$

□

Teorema 1.2.3 (Formula di Grassmann proiettiva).

Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottospazi, allora $\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$.

⁹Stiamo anche usando che $\mathbb{P}(V) \supseteq A$ e che $\mathbb{P}(V)$ sia un sottospazio di $\mathbb{P}(V)$, dunque che la famiglia su cui facciamo l'intersezione sia non vuota e, per costruzione, $A \subseteq \bigcap_{\substack{S \supseteq A \\ S \text{ ssp}}} S$.

Dimostrazione. Siano $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$, allora, usando la **Formula di Grassmann vettoriale**, otteniamo

$$\begin{aligned} \dim L(S_1, S_2) &\stackrel{\text{Prop. 1.2.2}}{=} \dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) = \dim(H_1 + H_2) - 1 = \\ &\stackrel{\text{Grass. vett.}}{=} \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2) - 1 = \\ &= \dim \mathbb{P}(H_1) + 1 + \dim \mathbb{P}(H_2) + 1 - \dim \mathbb{P}(H_1 \cap H_2) - 1 - 1 = \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) \end{aligned}$$

□

Corollario 1.2.4. *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottospazi,*

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V) \implies S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$$

Dimostrazione. $\dim(S_1 \cap S_2) = \underbrace{-\dim L(S_1, S_2)}_{\leq \dim \mathbb{P}(V)} + \underbrace{\dim S_1 + \dim S_2}_{\geq \dim \mathbb{P}(V)} \geq 0 \implies S_1 \cap S_2 \neq \emptyset.$ □

Corollario 1.2.5. *Due rette proiettive contenute in un piano proiettivo hanno intersezione non vuota.*

Al contrario di quel che accade nel piano affine, nel piano proiettivo non esistono rette disgiunte. Vale di più: date rette r_1, r_2, r'_1, r'_2 , con $r_1 \neq r_2, r'_1 \neq r'_2$ in $\mathbb{P}(V)$ e $\dim \mathbb{P}(V) = 2, \exists f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ proiettività tale che $f(r_1) = r'_1$ e $f(r_2) = r'_2$.

Il piano proiettivo è “più omogeneo” del piano affine.

Esercizio 3. *Siano $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo 3-dimensionale, $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ rette, $P \in \mathbb{P}(V)$ punto, con $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ e $P \notin r_1 \cup r_2$, allora $\exists! r \subseteq \mathbb{P}(V)$ retta proiettiva tale che $r \cap r_1 \neq \emptyset, r \cap r_2 \neq \emptyset$ e $P \in r$.*

Dimostrazione. Siano $S_1 = L(r_1, P)$ e $S_2 = L(r_2, P)$:

$\dim S_1 = \dim r_1 + \dim\{P\} - \dim(r_1 \cap P) = 1 + 0 - (-1) = 2$ e, analogamente, anche $\dim S_2 = 2$. Poniamo $r = S_1 \cap S_2$: $\dim r = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(L(S_1, S_2)) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Infatti, S_1, S_2 sono due piani: se coincidessero, $S_1 = S_2$ conterrebbe sia r_1 che r_2 il che implicherebbe $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ che è contro l'ipotesi. Dunque $S_1 \neq S_2$ e $L(S_1, S_2) \supsetneq S_1$ da cui (vedasi sotto)

$$\dim L(S_1, S_2) > \dim S_1 = 2 \implies \dim L(S_1, S_2) = 3 \text{ (siamo in dimensione 3)}$$

Vediamo che r funziona, cioè $r \cap r_1 \neq \emptyset, r \cap r_2 \neq \emptyset$ e $P \in r$.

Che $P \in r$ è ovvio: $r = S_1 \cap S_2$ e $P \in S_1, P \in S_2$ per costruzione. Inoltre, r ed r_1 sono complanari (giacciono entrambe su S_1), per cui $r \cap r_1 \neq \emptyset$ e, analogamente, $r \cap r_2 \neq \emptyset$.

L'unicità è più semplice: se r' verifica la tesi, $r' \cap r_1 \neq \emptyset$ e $P \in r' \implies r' \subseteq L(P, r_1) = S_1$ ¹⁰.

Analogamente, $r' \subseteq S_2$, da cui $r' \subseteq S_1 \cap S_2 = r$ e $r' = r$ perché hanno la stessa dimensione. □

Abbiamo utilizzato più volte il seguente **Fatto**, che discende dall'analogo vettoriale:

Fatto 1.2.6. *$S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottospazi tali che $S_1 \subseteq S_2$, allora:*

(1) $\dim S_1 \leq \dim S_2$;

(2) se $\dim S_1 = \dim S_2 \implies S_1 = S_2$.

¹⁰In quanto $r' \cap r_1 = \{Q\}$ e $r' = L(P, Q) \subseteq L(P, r_1)$, tutte cose che andrebbero motivate.

1.3 Sistemi di punti

Definizione 1.3.1. Siano P_1, \dots, P_k punti di $\mathbb{P}(V)$. Essi si dicono **indipendenti** se, posto $P_i = [v_i]$ con $i = 1, \dots, k$, i vettori v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti.

È una buona definizione: se $v'_i = \lambda_i v_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ e $i = 1, \dots, k$,

$$v_1, \dots, v_k \text{ sono indipendenti} \iff v'_1, \dots, v'_k \text{ sono indipendenti.}$$

Esercizio 4. P_1, \dots, P_k sono indipendenti $\iff \dim L(\{P_1, \dots, P_k\}) = k - 1$.

(Hint: per induzione, $L(\{P_1, \dots, P_k\}) = \mathbb{P}(\text{Span}\langle v_1, \dots, v_k \rangle)$.)

In particolare, se $n = \dim \mathbb{P}(V)$ e P_1, \dots, P_k sono indipendenti allora $k \leq n + 1$.

Definizione 1.3.2. I punti P_1, \dots, P_k sono **in posizione generale** se ogni famiglia P_{i_1}, \dots, P_{i_h} , con $h \leq \dim \mathbb{P}(V) + 1 = n + 1$ e $i_j \neq i_{j'}$ se $j \neq j'$, è data da punti indipendenti.

In altre parole: se $k \leq n + 1$, i punti sono in posizione generale se e solo se sono indipendenti; se $k > n + 1$, si chiede che presi comunque $n + 1$ punti tra i P_i , essi siano indipendenti (e dunque ciò vale anche se si prendono h punti, con $h \leq n + 1$).

Ad esempio, una famiglia di punti distinti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è in posizione generale \iff sono a 3 a 3 non allineati.

Definizione 1.3.3. Un **riferimento proiettivo** di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = n$ è una $(n + 2)$ -upla ordinata P_0, \dots, P_n, P_{n+1} di punti in posizione generale. Una **base normalizzata** associata a un riferimento proiettivo P_0, \dots, P_{n+1} è una base vettoriale $\{v_0, \dots, v_n\}$ di V tale che

$$[v_0] = P_0, [v_1] = P_1, \dots, [v_n] = P_n \text{ e } [v_0 + v_1 + \dots + v_n] = P_{n+1}$$

Il punto P_{n+1} si chiama **punto unità** del riferimento, mentre P_0, \dots, P_n si chiamano **punti fondamentali**.

Teorema 1.3.1. Sia \mathcal{R} un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora esiste una base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} . Se (v_0, \dots, v_n) e (v'_0, \dots, v'_n) sono due basi normalizzate di V rispetto a \mathcal{R} , allora $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $v_i = \lambda v'_i \forall i = 0, \dots, n$.

Dimostrazione. $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n, P_{n+1}\}$, scegliamo $v_i \in V$ tale che $[v_i] = P_i \forall i = 0, \dots, n + 1$. (v_0, \dots, v_n) è una base di V perché i punti P_0, \dots, P_n sono indipendenti (quindi v_0, \dots, v_n sono linearmente indipendenti) e $\dim_{\mathbb{K}} V = n + 1 \implies$ è una base.

Dunque $v_{n+1} = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$ per alcuni $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Osserviamo che $a_i \neq 0 \forall i = 0, \dots, n$, infatti se $a_i = 0$ seguirebbe che i vettori $v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}$ non sarebbero linearmente indipendenti (\widehat{v}_i significa che lo ometto). Questo va contro l'ipotesi che i punti $P_0, \dots, \widehat{P}_i, \dots, P_{n+1}$ siano indipendenti (segue dal fatto che \mathcal{R} sia un riferimento proiettivo). Poniamo $v'_i = a_i v_i$ per $i = 0, \dots, n$ e $v'_{n+1} = v_{n+1}$. Ora (v'_0, \dots, v'_n) è ancora una base e $v'_{n+1} = v_{n+1} = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n = v'_0 + \dots + v'_n$, quindi (v'_0, \dots, v'_n) è una base normalizzata di \mathcal{R} .

Ora se (v''_0, \dots, v''_n) è un'altra base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} , allora $[v''_i] = P_i = [v'_i] \implies \exists \lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tale che $v'_i = \lambda_i v''_i$ per $i = 0, \dots, n + 1$. Adesso però $v'_{n+1} = v'_0 + \dots + v'_n = \lambda_0 v''_0 + \dots + \lambda_n v''_n$, inoltre $\lambda_{n+1} v''_{n+1} = \lambda_{n+1} (v''_0 + \dots + v''_n) = \lambda_{n+1} v''_0 + \dots + \lambda_{n+1} v''_n$ e $v'_{n+1} = \lambda_{n+1} v''_{n+1}$.

Visto che (v''_0, \dots, v''_n) è una base di V , concludiamo che $\lambda_i = \lambda_{n+1} \forall i = 0, \dots, n$ cioè la tesi. \square

Teorema 1.3.2. Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ due trasformazioni proiettive e $\varphi, \psi : V \longrightarrow W$ funzioni lineari tali che $f = [\varphi]$ e $g = [\psi]$, sia \mathcal{R} un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora sono equivalenti:

- ① $f = g$;
- ② $f(P) = g(P) \forall P \in \mathcal{R}$;
- ③ $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $\varphi = \lambda \psi$.

Dimostrazione. (1) \implies (2) è ovvia;

(3) \implies (1) se $P \in \mathbb{P}(V)$ e scriviamo $P = [v]$, allora $f(P) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g(P)$;

(2) \implies (3) usando il **Teorema 1.3.1**, fissiamo (v_0, \dots, v_n) una base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ e sia $[v_{n+1}] = P_{n+1}$.

$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)] \implies \exists \lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tale che $\varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i) \forall i = 0, \dots, n+1$.

Sappiamo anche che

$$\begin{aligned} \lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n) &= \varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) = \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \varphi(v_{n+1}) = \lambda_{n+1} \psi(v_{n+1}) = \\ &= \lambda_{n+1} \psi(v_0) + \dots + \lambda_{n+1} \psi(v_n) \end{aligned}$$

Visto che $\psi : V \rightarrow W$ è iniettiva e (v_0, \dots, v_n) è una base di V abbiamo che $\psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$ sono linearmente indipendenti in $W \implies \lambda_i = \lambda_{n+1} \forall i = 0, \dots, n$.

Poiché $\varphi = \lambda_{n+1} \psi$ su una base di V , sono la stessa funzione, cioè $\varphi = \lambda \psi$. \square

Corollario 1.3.3. Il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$, che si indica con $\mathbb{P}\mathcal{GL}(V)$, è isomorfo a $\mathcal{GL}(V)/N$, dove $N = \{\lambda \text{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\} \triangleleft \mathcal{GL}(V)$.

Dimostrazione. $\mathcal{GL}(V) \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{GL}(V)$ è un omomorfismo suriettivo (per definizione) e il Ker è proprio N (segue dal **Teorema 1.3.2**). \square

Notazione: se $V = \mathbb{K}^{n+1}$, $\mathbb{P}\mathcal{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) = [\text{proiettività di } \mathbb{P}^n(\mathbb{K})]$ si indica con $\mathbb{P}\mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$.

Ad esempio, $\mathbb{P}\mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ indica le proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Teorema 1.3.4 (fondamentale delle trasformazioni proiettive).

Siano $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi su \mathbb{K} , con $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$, e \mathcal{R} e \mathcal{R}' riferimenti proiettivi rispettivamente di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$, allora $\exists! f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva che manda (ordinatamente) \mathcal{R} in \mathcal{R}' .

Dimostrazione. Scriviamo $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1}), \mathcal{R}' = (Q_0, \dots, Q_{n+1})$ e siano $(v_0, \dots, v_n), (w_0, \dots, w_n)$ basi normalizzate di V e W rispetto a \mathcal{R} e \mathcal{R}' rispettivamente. Sappiamo che $\exists! \varphi : V \rightarrow W$ tale che $\varphi(v_i) = w_i$, quindi se $f = [\varphi]$, abbiamo che $f(P_i) = Q_i \forall i = 0, \dots, n$.

$\varphi(v_0 + \dots + v_n) = w_0 + \dots + w_n$, quindi anche $f(P_{n+1}) = [\varphi(v_0 + \dots + v_n)] = [w_0 + \dots + w_n] = Q_{n+1}$.

Questa f è una trasformazione proiettiva cercata. L'unicità segue dal **Teorema 1.3.2**. \square

Esercizio 5. Siano r, r', s, s' quattro rette proiettive in $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, $r \neq r'$ e $s \neq s'$, allora $\exists f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ proiettività tale che $f(r) = s$ e $f(r') = s'$.



Dimostrazione. $r \neq r' \implies r \cap r'$ è un sottospazio proiettivo di r e ha $\dim 0$ (per Grassmann), quindi è un punto che chiameremo P . Analogamente, $s \cap s' = \{Q\}$.

Volendo usare i riferimenti proiettivi, scegliamo $A \in r \setminus \{P\}, B \in r' \setminus \{P\}, C \in \mathbb{P}(V) \setminus \{r \cup r' \cup L(A, B)\}$ e $A' \in s \setminus \{Q\}, B' \in s' \setminus \{Q\}, C' \in \mathbb{P}(V) \setminus \{s \cup s' \cup L(A', B')\}$, così $\mathcal{R} = \{A, B, C, P\}$ e $\mathcal{R}' = \{A', B', C', Q\}$ sono due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

Per il **Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive**, $\exists! f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ trasformazione proiettiva tale che $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$ e $f(P) = Q$, da questo segue che $f(r) = s$ (la retta r va nella retta passante per $f(A) = A'$ ed $f(P) = Q$, cioè s) e che $f(r') = s'$. \square

Domanda: una tale proiettività (cioè tale che $f(r) = s$ e $f(r') = s'$) è unica?

1.4 Coordinate omogenee

Richiamo: V spazio vettoriale su \mathbb{K} , $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, allora fissare una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ corrisponde a dare un isomorfismo lineare

$$\begin{aligned} \varphi: V &\xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n \\ v_i &\longmapsto e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-esimo}}{1}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$v \in V$ ha coordinate $(a_1, \dots, a_n) = \varphi(v)$ rispetto alla base \mathcal{B} ¹¹. Vediamo che nel caso proiettivo, un riferimento proiettivo \mathcal{R} di $\mathbb{P}(V)$ determina delle coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$.

Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$, allora $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ dove $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n)$ se $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $a_i = \lambda b_i \forall i = 0, \dots, n$. La classe di equivalenza in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di (a_0, \dots, a_n) si indica con $[a_0, \dots, a_n]$ (a volte $[a_0 : \dots : a_n]$). Si dice che (a_0, \dots, a_n) sono delle coordinate omogenee del corrispondente punto $[a_0, \dots, a_n]$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Osservazione 5. • Le coordinate omogenee di $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ non sono uniche:

(a_0, \dots, a_n) e (b_0, \dots, b_n) sono coordinate omogenee dello stesso punto se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $a_i = \lambda b_i \forall i = 0, \dots, n$;

• La scrittura $[0, \dots, 0]$ non ha senso... (in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ non c'è un' "origine").

Definizione 1.4.1. Sia ora $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = n$ e (v_0, \dots, v_n) una base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} . Prendiamo $P \in \mathbb{P}(V)$, scegliamo $v \in V$ tale che $[v] = P$ e scriviamo $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$, con $a_i \in \mathbb{K}$. (a_0, \dots, a_n) è una $(n+1)$ -upla di coordinate omogenee di P rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{R} .

Le coordinate omogenee non sono uniche, ma lo sono a meno di "riscaldamento simultaneo". Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n su \mathbb{K} , \mathcal{R} un suo riferimento proiettivo e (v_0, \dots, v_n) una base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} .

Preso $P \in \mathbb{P}(V)$, scegliamo $v \in V$ tale che $[v] = P$ e scriviamo $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ (unicamente).

La $(n+1)$ -upla (a_0, \dots, a_n) è una $(n+1)$ -upla di coordinate omogenee per $P \in \mathbb{P}(V)$.

Cambiando rappresentante per P , cioè prendendo λv , con $\lambda \in \mathbb{K}^*$, avremo $\lambda v = \sum_{i=0}^n (\lambda a_i) v_i$ quindi $(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ è un'altra $(n+1)$ -upla di coordinate omogenee per P .

Osservazione 6. La funzione $\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{P}(V) &\longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \\ P &\longmapsto & [a_0, \dots, a_n] \end{array}$ è ben definita (appena visto).

È l'isomorfismo proiettivo indotto dall'isomorfismo lineare $V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{n+1}$ corrispondente alla base normalizzata (v_0, \dots, v_n) .

Proposizione 1.4.1. L'isomorfismo proiettivo φ non dipende dalla scelta della base normalizzata associata al riferimento \mathcal{R} .

Dimostrazione. Se (v'_0, \dots, v'_n) è un'altra base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} , allora $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $v'_i = \lambda v_i \forall i = 0, \dots, n$, ma allora se $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ avremo $v = \sum_{i=0}^n a_i \frac{1}{\lambda} (\lambda v_i) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{\lambda} v'_i$, quindi

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{P}(V) &\longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \\ P = [v] &\longmapsto & [\frac{a_0}{\lambda}, \dots, \frac{a_n}{\lambda}] \end{array} \text{ viene dalla base } (v'_0, \dots, v'_n), \text{ ma } [\frac{a_0}{\lambda}, \dots, \frac{a_n}{\lambda}] = \varphi(P) \implies \varphi' = \varphi. \quad \square$$

Osservazione 7. $\varphi: \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dipende quindi solamente dal riferimento proiettivo \mathcal{R} e manda \mathcal{R} nel riferimento proiettivo "standard" di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, cioè

$$([1, 0, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1], [1, 1, \dots, 1])$$

ed è l'unica con questa proprietà (per il **Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive**).

¹¹Questo corrisponde a scrivere $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$.

In effetti questa costruzione dà una bigezione tra riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e gli isomorfismi proiettivi tra $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Le coordinate omogenee permettono di descrivere trasformazioni proiettive e sottospazi tramite matrici ed equazioni.

Trasformazioni proiettive: siano $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi e $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ una trasformazione proiettiva. Dati \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente, \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 due basi normalizzate e data $\varphi : V \rightarrow W$ tale che $[\varphi] = f$, la matrice M che rappresenta φ rappresenta anche f , nel senso che

$$v \in V \quad [v] = P, \quad f(P) = \underbrace{\left[M \cdot \overbrace{\{v\}_{\mathcal{B}_1}}^{\text{coord. di } v \text{ nella base } \mathcal{B}_1} \right]}_{\substack{\text{coord. omog. di } f(P) \\ \text{in } \mathbb{P}(W) \text{ risp. a } \mathcal{B}_2}}$$

Osservazione 8. La matrice M che rappresenta f non è unica ma lo è a meno di moltiplicazione per un $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Esempio 4. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ rappresenta $\begin{pmatrix} \mathbb{K}^2 \\ a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{K}^2 \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$ e la trasformazione proiettiva associata $\begin{matrix} \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \\ [a_0, a_1] & \mapsto & [a_0 + a_1, a_1] \end{matrix}$.

Sottospazi proiettivi: siano $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo, $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottospazio proiettivo, \mathcal{R} riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e \mathcal{B} una base normalizzata. Per definizione di sottospazio proiettivo, $S = \mathbb{P}(W)$ con $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Se M è una matrice che descrive W nelle coordinate date dalla base normalizzata \mathcal{B} , cioè $M \cdot \{v\}_{\mathcal{B}} = 0 \iff v \in W$, allora la matrice M rappresenta anche il sottospazio proiettivo $S \subseteq \mathbb{P}(V)$, nel senso che $M \cdot \{v\}_{\mathcal{B}} = 0 \iff P = [v] \in S = \mathbb{P}(W)$ ed è detta **rappresentazione cartesiana** di S .

Esempio 5. Un iperpiano $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di dimensione $\dim \mathbb{P}(V) - 1$ (codimensione 1) ed è descritto da un'equazione lineare omogenea $a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ dove $a_i \in \mathbb{K}$ (non tutti nulli).

Osservazione 9. Due equazioni del genere descrivono lo stesso iperpiano \iff differiscono per moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Esempio 6. Se $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, le rette sono descritte da equazioni lineari omogenee della forma $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ (non tutti nulli).

Osservazione 10. Il fatto che le equazioni siano omogenee assicura che queste definiscano effettivamente un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$.

Ad esempio, l'equazione $2x_0 + x_1 + x_2 = 3$ non definisce un luogo di punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

I sottospazi proiettivi si possono anche rappresentare in forma parametrica, cioè come immagine di una trasformazione proiettiva $\mathbb{P}(W') \rightarrow \mathbb{P}(V) \supseteq S = \mathbb{P}(W)$. Ad esempio, scegliendo una base di $W \subseteq V$ (w_0, \dots, w_k), si ha $\begin{matrix} \mathbb{K}^{k+1} & \rightarrow & V \\ e_i & \mapsto & w_i \end{matrix}$, la cui immagine è esattamente W .

Se M è la matrice che rappresenta φ (nelle coordinate date dalla base normalizzata fissata di V),

$$v \in W \iff \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^{k+1} \text{ tali che } \{v\}_{\mathcal{B}} = M \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nel proiettivo, } P = [v] \in S = \mathbb{P}(W) \iff \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^{k+1} \text{ tale che } \{v\}_{\mathcal{B}} = M \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Esempio 7. La retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[1, 1, 0]$ e $[0, 1, 1]$ ha rappresentazione parametrica

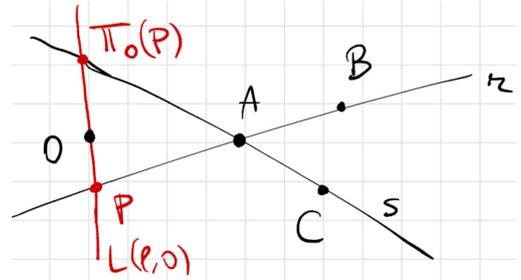
$$[\lambda_0(1, 1, 0) + \lambda_1(0, 1, 1)] = [\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_1], \text{ con } \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ (non entrambi nulli)}$$

e rappresentazione cartesiana

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

Esercizio 6 (Prospettività).

Siano $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, r, s rette distinte in $\mathbb{P}(V)$, $\{A\} = r \cap s$ e $O \in \mathbb{P}(V) \setminus \{r \cup s\}$. Dato $P \in r$, consideriamo $L(P, O)$ ($P \neq O$ perché $O \notin r$) e $\Pi_O(P)$ il punto $L(P, O) \cap s$ ($L(P, O) \neq s$ perché $O \notin s$). $\Pi_O : r \rightarrow s$ si chiama la **prospettività di centro O** .



Proposizione 1.4.2. Π_O è una trasformazione proiettiva (in realtà è un isomorfismo proiettivo).

Dimostrazione. Vogliamo scrivere Π_O usando una matrice dopo aver fissato dei riferimenti proiettivi. Fissiamo $B \in r \setminus \{A\}$ e $C \in s \setminus \{A \cup L(O, B)\}$. In questo modo $\mathcal{R} = (A, B, C, O)$ è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Nelle coordinate corrispondenti abbiamo $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$ e $O = [1, 1, 1]$. r e s hanno quindi equazioni $r : x_2 = 0$ e $s : x_1 = 0$.

Fissiamo una base normalizzata di V rispetto a \mathcal{R} , $\{v_A, v_B, v_C\}$, con $[v_A] = A$, $[v_B] = B$ e $[v_C] = C$. Notiamo che (v_A, v_B) è una base $H_r \subseteq V$, il sottospazio vettoriale corrispondente alla retta r . Questa base ci dà coordinate omogenee su r .

Analogamente (v_A, v_C) è una base di $H_s \subseteq V$ corrispondente a s .

Vogliamo scrivere $\Pi_O : r \rightarrow s$ in queste coordinate.

L'inclusione $r \rightarrow \mathbb{P}(V)$ si scrive in questo modo: il punto $P = [\lambda v_A + \mu v_B]$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (non entrambi nulli), (coordinate $[\lambda, \mu]$ in r) ha coordinate $[\lambda, \mu, 0]$ in $\mathbb{P}(V)$.

Allo stesso modo $s \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è data da $[\lambda, \mu] \leftrightarrow [\lambda v_A + \mu v_C]$ che in $\mathbb{P}(V)$ ha coordinate $[\lambda, 0, \mu]$. Partendo da $P = [\lambda, \mu]$ in r , scriviamo la retta $L(O, P)$ (passante per $[\lambda, \mu, 0]$ e $[1, 1, 1]$): l'equazione è

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & x_0 \\ \mu & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \mu x_0 - \lambda x_1 + (\lambda - \mu)x_2 = 0$$

Intersechiamo con $s : x_1 = 0$ per trovare le coordinate di $\Pi_O(P)$:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \mu x_0 - \lambda x_1 + (\lambda - \mu)x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \mu x_0 + (\lambda - \mu)x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = \mu - \lambda \\ x_2 = \mu \end{cases}$$

$[\mu - \lambda, 0, \mu]$ è l'unica soluzione "proiettiva".

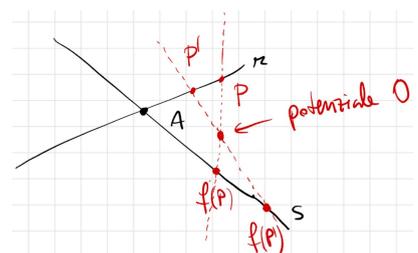
Le coordinate di $\Pi_O(P)$ in s sono $[\mu - \lambda, \mu]$.

Abbiamo scoperto che Π_O in coordinate si scrive $[\lambda, \mu] \rightarrow [\mu - \lambda, \mu]$, da questo segue che è una trasformazione proiettiva indotta dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (rispetto alle basi (v_A, v_B) e (v_A, v_C)).

Seconda parte: (notiamo che ogni prospettività soddisfa $\Pi_O(A) = A$.)

Se $f : r \rightarrow s$ è una trasformazione proiettiva tale che $f(A) = A$, allora f è una prospettività, cioè $\exists O \in \mathbb{P}(V) \setminus \{r \cup s\}$ tale che $f = \Pi_O$.

Diciamo che f è proprio Π_O : $f, \Pi_O : r \rightarrow s$ sono due trasformazioni proiettive che coincidono sul riferimento proiettivo $\{A, P, P'\}$ di r , quindi sono la stessa funzione (per il **Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive**).



□

1.5 Carte affini e punti all'infinito

Sappiamo che ogni spazio proiettivo di dimensione finita su \mathbb{K} è isomorfo a $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. $\forall i = 0, \dots, n$ poniamo $H_i = \{x_i = 0\}$ e $U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i = \{x_i \neq 0\}$.
ben definito iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ complementare di un iperpiano

Ha senso considerare i punti con i -esima coordinata omogenea nulla: ad esempio, non avrebbe senso considerare i punti tali che $x_2 + 3 + x_1^2 = 0$ (questa condizione non è invariante per moltiplicazione per scalari non nulli).

Per costruzione, $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ ¹².

Teorema 1.5.1. $\forall i = 0, \dots, n$ c'è una bigezione naturale $J_i : \mathbb{K}^n \rightarrow U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ cioè "ogni U_i è una copia di \mathbb{K}^n ".

Dimostrazione. Definiamo $J_i(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_i, 1, u_{i+1}, \dots, u_n]$ che è chiaramente ben definita ¹³.

J_i ammette l'inversa $J_i^{-1}([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$.

Se $[x_0, \dots, x_n] \in U_i$, allora $x_i \neq 0$, per cui $\frac{x_s}{x_i}$ è ben definito $\forall s = 0, \dots, n$. Dobbiamo anche controllare che se $(y_0, \dots, y_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n)$, con $\lambda \neq 0$, allora $\frac{y_j}{y_i} = \frac{x_j}{x_i} \forall j = 0, \dots, n$ ma questo è ovvio: $\frac{y_j}{y_i} = \frac{\lambda x_j}{\lambda x_i} = \frac{x_j}{x_i}$. Per concludere, vediamo che davvero J_i e J_i^{-1} sono una l'inversa dell'altra:

- $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$J_i^{-1}(J_i(u_1, \dots, u_n)) = J_i^{-1}([u_1, \dots, u_i, 1, u_{i+1}, \dots, u_n]) = \left(\frac{u_1}{1}, \dots, \frac{\widehat{1}}{1}, \dots, \frac{u_n}{1}\right) = (u_1, \dots, u_n);$$

- $\forall [x_0, \dots, x_n] \in U_i$,

$$\begin{aligned} J_i(J_i^{-1}([x_0, \dots, x_n])) &= J_i\left(\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right) = \\ &= \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] = [x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] \end{aligned}$$

(per definizione di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, possiamo moltiplicare tutte le coordinate per x_i , che è $\neq 0$).

□

Ci concentreremo prevalentemente sulla decomposizione $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0$, per cui

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \underbrace{J_0(\mathbb{K}^n)}_{\text{copia di } \mathbb{K}^n} \cup \underbrace{H_0}_{\substack{\text{iperp. proiet.} \\ \text{isom. a } \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})}}$$

$J_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si chiama **carta affine** e H_i è l'insieme dei **punti all'infinito** (relativi a J_i). Se non specificato altrimenti, la carta affine sarà J_0 e i punti all'infinito, detti anche **punti impropri**, sono dati da H_0 . Dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \underbrace{U_0}_{\text{punti propri}} \cup \underbrace{H_0}_{\text{punti impropri}}$.

Abbiamo recuperato la costruzione di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ come "completamento" di \mathbb{K}^n ¹⁴.

È bene considerare $\mathbb{K}^n \cong J_0(\mathbb{K}^n) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ come spazio affine, piuttosto che vettoriale.

Proposizione 1.5.2. ① Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ un sottospazio proiettivo di dimensione k con $V \not\subseteq H_0$, allora $J_0^{-1}(V \cap U_0)$ è un sottospazio affine di \mathbb{K}^n anch'esso di dimensione k , detto **parte affine** di V .

② Sia $W \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottospazio affine con $\dim W = k \geq 0$, allora $\exists!$ sottospazio proiettivo $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ tale che $J_0^{-1}(\overline{W} \cap U_0) = W$. Inoltre $\dim \overline{W} = \dim W = k$ e \overline{W} si dice **chiusura proiettiva** di W .

¹²In quanto ogni punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha almeno una coordinata non nulla.

¹³ $U_i = \{x_i \neq 0\}$, dove x_i è la coordinata che si trova al posto $(i+1)$ -esimo e l'abbiamo imposta $\neq 0$.

¹⁴Identificheremo spesso \mathbb{K}^n con $J_0(\mathbb{K}^n)$.

Esercizi I settimana

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ una proiettività diversa dall'identità. Si mostri che $f^2 = \text{Id}$ se e solo se esistono punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tali che $f(P) = Q$ e $f(Q) = P$.

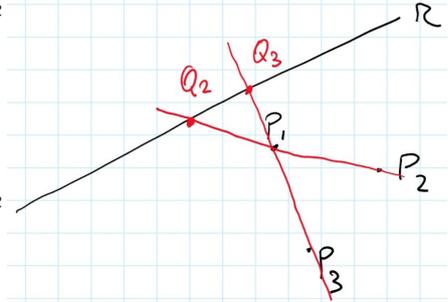
Dimostrazione. (\implies) Poiché $f \neq \text{Id}$, $\exists P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tale che $f(P) \neq P$. Poniamo $Q = f(P)$, dunque

$$P = f^2(P) = f(f(P)) = f(Q)$$

(\impliedby) Scegliamo $R \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus \{P, Q\}$ (esiste sempre perché $|\mathbb{P}^1(\mathbb{K})| \geq 3 \forall \mathbb{K}$). P, Q, R formano un riferimento proiettivo (perché?), perciò fissiamo delle coordinate omogenee associate a tale riferimento, per cui $P \equiv [1, 0]$ e $Q \equiv [0, 1]$. Con tale scelta, $f = [\varphi]$, dove $\varphi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$, rispetto a una base normalizzata associata a P, Q, R , è rappresentata da una matrice A tale che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (poiché $f(P) = Q$), con $\lambda \neq 0$, e $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (poiché $f(Q) = P$), con $\mu \neq 0$, cioè $A = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Dunque $A^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix} = \lambda\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, per cui $f^2 = \text{Id}$ (è ovvio che se A rappresenta f , allora A^2 rappresenta f^2). \square

Esercizio 2. Siano P_1, P_2, P_3 punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ in posizione generale e sia $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una retta tale che $P_i \notin r$ per $i = 1, 2, 3$.

- (1) Si mostri che esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tale che $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_2$ e $f(r) = r$.
- (2) Si mostri che l'insieme dei punti fissi di f è dato dall'unione di un punto $M \in r$ e una retta s con $M \notin s$.



Dimostrazione. (1) Useremo diffusamente che una trasformazione proiettiva manda rette in rette; più in generale, essendo indotta da una funzione lineare iniettiva, una trasformazione proiettiva g manda sottospazi proiettivi di dimensione k in sottospazi proiettivi di dimensione k (perché $g = [\psi]$ e ψ manda $(k+1)$ -sottospazi vettoriali in $(k+1)$ -sottospazi vettoriali).

Unicità: Siano $Q_2 = L(P_1, P_2) \cap r$, $Q_3 = L(P_1, P_3) \cap r$ ¹⁵.

I punti P_2, P_3, Q_2, Q_3 sono un riferimento proiettivo, in quanto a 3 a 3 non allineati: se P_2, P_3, Q_2 fossero allineati, allora $L(P_2, P_3) = L(Q_2, P_2)$, da cui $P_1 \in L(P_2, Q_2) = L(P_2, P_3)$ e P_1, P_2, P_3 sarebbero allineati ζ ; stesso argomento per P_2, P_3, Q_3 . Se invece P_2, Q_2, Q_3 fossero allineati, allora $P_2 \in L(Q_2, Q_3) = r$ ζ ; stesso argomento per P_3, Q_2, Q_3 . Ora,

$$f(Q_2) = f(L(P_1, P_2) \cap r) = {}^{16} f(L(P_1, P_2)) \cap f(r) = {}^{17} L(f(P_1), f(P_2)) \cap r = L(P_1, P_3) \cap r = Q_3$$

Analogamente, $f(Q_3) = Q_2$.

Per ipotesi, $f(P_2) = P_3$ e $f(P_3) = P_2$, dunque una f che verifica la tesi coincide necessariamente con l'unica proiettività tale che $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_2$, $f(Q_2) = Q_3$ e $f(Q_3) = Q_2$.

Esistenza: Sia ora f la proiettività descritta e vediamo che verifichi le richieste: resta solo da vedere che $f(r) = r$ e $f(P_1) = P_1$:

$$\begin{aligned} f(r) &= f(L(Q_2, Q_3)) = L(f(Q_2), f(Q_3)) = L(Q_3, Q_2) = r \\ f(P_1) &= f(L(P_2, Q_2) \cap L(P_3, Q_3)) = L(f(P_2), f(Q_2)) \cap L(f(P_3), f(Q_3)) = \\ &= L(P_3, Q_3) \cap L(P_2, Q_2) = P_1. \end{aligned}$$

¹⁵Sono ben definiti, perché $r \neq L(P_1, P_3)$, visto che $P_1 \notin r$.

¹⁶ f è bigettiva.

¹⁷Rette vanno in rette.

(2) Fissiamo ora le coordinate omogenee relative al riferimento scelto prima P_2, P_3, Q_2, Q_3 : assumiamo dunque $P_2 = [1, 0, 0]$, $P_3 = [0, 1, 0]$, $Q_2 = [0, 0, 1]$ e $Q_3 = [1, 1, 1]$.

Sia A una matrice che rappresenti f rispetto ad una base normalizzata associata al riferimento, perciò:

- $f(P_2) = P_3 \implies A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$;

- $f(P_3) = P_2 \implies A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \neq 0$; $\implies A = \begin{pmatrix} 0 & \mu & \eta \\ \lambda & 0 & \eta \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}$.

- $f(Q_2) = Q_3 \implies A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta \neq 0$;

Ora, imponendo $f(Q_3) = Q_2$, otteniamo $f(Q_3) = \left[A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} \mu + \eta \\ \lambda + \eta \\ \eta \end{pmatrix} \right] = [0, 0, 1]$ da cui $\mu = -\eta$

e $\lambda = -\eta$, perciò $A = \begin{pmatrix} 0 & -\eta & \eta \\ -\eta & 0 & \eta \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}$ e possiamo quindi scegliere $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

I punti fissi di f corrispondono bigettivamente alle rette di autovettori di A .

Gli autovalori di A sono 1 (con molteplicità algebrica 1) e -1 (con molteplicità algebrica 2) in quanto $\det(A - t\text{Id}) = -(t+1)^2(t-1)$.

$A - \text{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, il cui Ker è $\text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$: otteniamo così il punto fisso $[1, 1, 0]$.

$A + \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il cui Ker è il piano in \mathbb{K}^3 dato da

$$\text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{x_0 + x_1 - x_2 = 0\}$$

Dunque $\mathbb{P}(\text{Ker}(A + \text{Id})) = L([1, 0, 1], [1, -1, 0]) = \{x_0 + x_1 - x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una retta s di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ fatta di punti fissi.

Quindi il luogo dei punti fissi è dato da $[1, 1, 0] \cup s$ e notiamo che:

$[1, 1, 0] \in r = L(Q_2, Q_3) = L([0, 0, 1], [1, 1, 1]) = \{x_0 = x_1\}$;

$[1, 1, 0] \notin s$ ($[1, 1, 0]$ non verifica $x_0 + x_1 - x_2 = 0$);

$P_2, P_3 \notin s$ (non verificano $x_0 + x_1 - x_2 = 0$).

Osservazione 11. Se $\text{char } \mathbb{K} = 2$, allora $[1, 1, 0] \in s$.

Una soluzione “sintetica” di questo esercizio è nel libro Fortuna-Friggerio-Pardini, esercizio 2.51. \square

1.6 Curve algebriche piane

Ricapitolando alcuni fatti riguardanti l'algebra dei polinomi:

Definizione 1.6.1. D è un **dominio a fattorizzazione unica (U.F.D.)** se $\forall p \in D \setminus \{0\} \exists a \in D^*, \exists p_1, \dots, p_k \in D$ *irriducibili* ed $\exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $p = ap_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, inoltre i p_i sono unici a meno dell'ordine e di moltiplicazione per scalari.

Fatto 1.6.1. $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica.

Ricordiamo che un polinomio $p \neq 0$ è **irriducibile** se, ogni volta che $p = qs$, con $q, s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, uno tra q ed s è costante (cioè ha grado 0, cioè è invertibile nell'anello $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$).

Definizione 1.6.2. Una **curva affine (piana)** è un elemento di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_1, x_2])$, cioè una classe di equivalenza di polinomi non nulli in due variabili, dove $p \sim q$ se $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $p = \lambda q$.

Una curva \mathcal{C} è perciò $\mathcal{C} = [f]$, $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2] \setminus \{0\}$.

- ① Se $\mathcal{C} = [f]$, si pone $\deg \mathcal{C} = \deg f$ (è ben definito perché $\deg f = \deg \lambda f$, se $\lambda \neq 0$);
 - ② $\mathcal{C} = [f]$ si dice **irriducibile** se f lo è;
 - ③ Una curva irriducibile $\mathcal{C}' = [g]$ si dice **componente irriducibile** di $\mathcal{C} = [f]$ se $g \mid f$;
 - ④ Se $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{C}' = [g]$, si pone $\boxed{\mathcal{C} + \mathcal{C}' = [f \cdot g]}$;
 - ⑤ Se $\mathcal{C} = [f]$, si dice che f è "un'equazione" di \mathcal{C} (o che " $f = 0$ è un'equazione di \mathcal{C} ");
 - ⑥ Se \mathcal{C} è una curva algebrica, $\exists! \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ ¹⁸ curve irriducibili e $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $\mathcal{C} = n_1 \mathcal{C}_1 + \cdots + n_k \mathcal{C}_k$, con $n_i \mathcal{C}_i = \underbrace{\mathcal{C}_i + \cdots + \mathcal{C}_i}_{n_i \text{ volte}}$.
- Ciò è una conseguenza della fattorizzazione unica dei polinomi;
- ⑦ \mathcal{C} si dice **ridotta** se, nella sua decomposizione in irriducibili $\mathcal{C} = n_1 \mathcal{C}_1 + \cdots + n_k \mathcal{C}_k$, si ha $n_i = 1 \forall i = 1, \dots, k$ (cioè \mathcal{C} non ha componenti multiple).

Definizione 1.6.3. Sia \mathcal{C} curva affine su \mathbb{K} , il **supporto** di $\mathcal{C} = [f]$ si indica con $V(\mathcal{C})$ ed è definito da $V(\mathcal{C}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$.

È ben definito perché f e λf , se $\lambda \neq 0$, hanno lo stesso luogo di zeri.

Fatto 1.6.2. $V(\mathcal{C} + \mathcal{C}') = V(\mathcal{C}) \cup V(\mathcal{C}') \forall \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ coppia di curve affini.

Infatti, se $\mathcal{C} = [f]$, $\mathcal{C}' = [g]$, $P \in V(\mathcal{C} + \mathcal{C}') \iff (f \cdot g)(P) = 0 \iff f(P)g(P) = 0 \iff P \in V(\mathcal{C})$ oppure $P \in V(\mathcal{C}')$.

Esempio 9. (1) Su \mathbb{C} , la curva $\mathcal{C} = [x_1 x_2]$ è *riducibile*, ha componenti $[x_1]$, $[x_2]$ ed è *ridotta* (è la somma di due rette);

(2) Su \mathbb{C} , $\mathcal{C}' = [x_1^2 x_2]$ non è *ridotta*. Se $\mathcal{C} = [x_1 x_2]$, $\deg \mathcal{C} = 2$, $\deg \mathcal{C}' = 3$, $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$ mentre $V(\mathcal{C}) = V(\mathcal{C}')$;

(3) Su \mathbb{C} , $\mathcal{C} = [x_1^2 + x_2^2]$ è *riducibile*: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$;

(4) Su \mathbb{R} , $\mathcal{C} = [x_1^2 + x_2^2]$ è *irriducibile*, perché $x_1^2 + x_2^2$ è *irriducibile* in $\mathbb{R}[x_1, x_2]$.

Infatti, se fosse *riducibile*, avremmo $f = gh$, $2 = \deg f = \deg g + \deg h$, $\deg g \geq 1$, $\deg h \geq 1 \implies \deg g = \deg h = 1$.

Ora, se $\deg g = 1$, $V([f]) = V([g]) \cup V([h])$ sarebbe unione di due rette affini (eventualmente coincidenti), in particolare sarebbe un insieme infinito, mentre $V([x_1^2 + x_2^2]) = \{(0, 0)\}$.

¹⁸Uniche a meno dell'ordine.

1.7 Curve proiettive piane

Definizione 1.7.1. Un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ si dice **omogeneo di grado d** se è somma di monomi di grado d .

Lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d si indica con $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$.

Definizione 1.7.2. Una **curva proiettiva (piana)** di grado d è un $[p] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d)$ tale che p è un polinomio omogeneo di grado d e $p \sim q$ se $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $p = \lambda q$.

Proposizione 1.7.1. $p \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ è omogeneo di grado $d \iff$

$$p(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d p(x_0, x_1, x_2) \text{ in } \mathbb{K}[t, x_0, x_1, x_2]$$

Dimostrazione. (\implies) Ovvvia, basta sostituire.

(\impliedby) Se $p = p_0 + p_1 + \dots + p_n$, dove p_i è omogeneo di grado i ¹⁹, allora

$$p(t, x_0, x_1, x_2) = \sum_{i=0}^n p_i(t, x_0, x_1, x_2) = \sum_{i=0}^n t^i p_i(x_0, x_1, x_2)$$

Per ipotesi, questa somma deve essere uguale a $t^d p(x_0, x_1, x_2)$, da cui

$$\sum_{i=0}^n t^i p_i(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i=0}^n t^d p_i(x_0, x_1, x_2) = t^d p$$

Perciò, portando a sinistra il termine di destra e raggruppando i termini in cui compare t^d , si ha

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq d}}^n t^i p_i(x_0, x_1, x_2) + t^d \left(p_d(x_0, x_1, x_2) - \sum_{i=0}^n p_i(x_0, x_1, x_2) \right) = 0$$

Affinché questa uguaglianza sia vera in $\mathbb{K}[t, x_0, x_1, x_2]$, tutti i termini della forma $t^i p_i(x_0, x_1, x_2)$, con $i \neq d$, devono essere nulli, da cui $p_i(x_0, x_1, x_2) = 0 \forall i \neq d$, cioè $p = p_d$ e p è omogeneo di grado d . \square

Corollario 1.7.2. Se $p \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $p(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^d p(x_0, x_1, x_2)$.

In particolare, ha senso affermare (se $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$) $p([x_0, x_1, x_2]) = 0$: con questa scrittura intendiamo che $p(x_0, x_1, x_2) = 0$, per cui $p(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$.

Attenzione!

① Se p non è omogeneo, può benissimo capitare $p(x_0, x_1, x_2) = 0$ ma

$p(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \neq 0$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Dunque, se p non è omogeneo, non ha senso chiedersi in quali punti del proiettivo si annulli.

② Se p è omogeneo e Q è un punto del proiettivo, abbiamo visto che ha senso chiedersi se $p(Q) = 0$ ma non ha senso chiedersi quanto vale $p(Q)$ (se $Q = [x_0, x_1, x_2]$ e $p(x_0, x_1, x_2) = 1$, cambiando rappresentante cambia il valore assunto da p): i polinomi omogenei non definiscono funzioni nel proiettivo ma definiscono luoghi di zeri.

Definizione 1.7.3. Se $C = [p]$ è una curva proiettiva, il **supporto** di C è

$$V(C) = \{Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid p(Q) = 0\}$$

Proposizione 1.7.3. Sia $p \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo di grado d :

1. Se $q \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ e $q \mid p$, allora q è omogeneo;
2. Se denotiamo con p_{x_i} la derivata parziale formale di p rispetto a x_i , allora

$$x_0 p_{x_0} + x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2} = dp \quad (\text{Identità di Eulero})$$

¹⁹Questa decomposizione è sempre possibile, basta raggruppare i monomi di grado i in p_i .

Dimostrazione. (1.) Sia $p = qs$ e supponiamo per assurdo che q ed s non siano omogenei.

Decomponiamo q ed s nelle loro componenti omogenee:

$$\left. \begin{aligned} q &= q_{i_0} + \dots + q_{i_n}, \text{ con } i_0 < \dots < i_n \text{ e ogni } q_{i_k} \text{ è omogeneo di grado } i_k, \\ s &= s_{j_0} + \dots + s_{j_m}, \text{ con } j_0 < \dots < j_m \text{ e ogni } s_{j_l} \text{ è omogeneo di grado } j_l, \end{aligned} \right\} q_{i_k}, s_{j_l} \text{ sono tutti non nulli.}$$

$$p = qs = \underbrace{q_{i_0} s_{j_0}}_{\substack{\text{termine omogeneo} \\ \text{di grado } i_0 + j_0}} + (\text{termini di grado } > i_0 + j_0).$$

p è omogeneo di grado $d \implies$ poiché i termini di grado superiore non possono cancellare q_{i_0}, s_{j_0} , ne segue che $p = q_{i_0} s_{j_0}$, in quanto qs deve essere omogeneo.

Analogamente, ragionando sul grado massimo otteniamo $p = q_{i_n} s_{j_m}$, dunque $p = q_{i_0} s_{j_0} = q_{i_n} s_{j_m}$, quindi $i_0 + j_0 = \deg q_{i_0} s_{j_0} = \deg p = \deg q_{i_n} s_{j_m} = i_n + j_m \not\equiv$ allora $q = q_{i_0}, s = s_{j_0}$ sono omogenei.

(2.) L'uguaglianza $dp = x_0 p_{x_0} + x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2}$ è "lineare" ²⁰ in quanto la derivazione parziale è lineare. Dunque basta verificare la tesi quando p è un monomio di grado d .

Sia $p = \lambda x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$, con $i_0 + i_1 + i_2 = d$.

$$\begin{aligned} x_0 p_{x_0} &= x_0 (\lambda i_0 x_0^{i_0-1} x_1^{i_1} x_2^{i_2}) = \lambda i_0 x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = i_0 p \\ x_1 p_{x_1} &= x_1 (\lambda x_0^{i_0} i_1 x_1^{i_1-1} x_2^{i_2}) = \lambda i_1 x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = i_1 p \\ x_2 p_{x_2} &= x_2 (\lambda x_0^{i_0} x_1^{i_1} i_2 x_2^{i_2-1}) = \lambda i_2 x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = i_2 p \end{aligned}$$

$$\implies x_0 p_{x_0} + x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2} = \lambda \underbrace{(i_0 + i_1 + i_2)}_d x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = d (\lambda x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}) = dp. \quad \square$$

Come nel caso affine:

- ① Se $\mathcal{C} = [p]$, $\deg \mathcal{C} = \deg p$ (è ben definito);
- ② $\mathcal{C} = [p]$ è **irriducibile** se p lo è come polinomio;
- ③ Una curva irriducibile $\mathcal{C}' = [g]$ si dice **componente irriducibile** di $\mathcal{C} = [f]$ se $g \mid f$;
- ④ Se $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{C}' = [g]$, si pone $\boxed{\mathcal{C} + \mathcal{C}' = [f \cdot g]}$ ²¹ e $V(\mathcal{C} + \mathcal{C}') = V(\mathcal{C}) \cup V(\mathcal{C}')$;
- ⑤ Se $\mathcal{C} = [p]$, allora p si dice "un'equazione" di \mathcal{C} ;
- ⑥ ²² Data una curva proiettiva \mathcal{C} , esiste ed è unica la sua decomposizione in componenti irriducibili $\mathcal{C} = n_1 \mathcal{C}_1 + \dots + n_k \mathcal{C}_k$;
- ⑦ \mathcal{C} si dice **ridotta** se, nella decomposizione in irriducibili, $n_i = 1 \forall i = 1, \dots, k$.

²⁰Cioè se la verificano p, q la verifica anche $p + q$.

²¹Ha grado $\deg \mathcal{C} + \deg \mathcal{C}'$.

²²Non completamente banale, segue dalla **Proposizione 1.7.3** cioè dal fatto che i fattori irriducibili di un polinomio omogeneo sono omogenei.

1.8 Equivalenza affine/proiettiva di curve

Vogliamo definire un'azione delle proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sulle curve proiettive di grado d . Deve trattarsi di un'azione sulle curve, non solo sui loro supporti ²³.

Siano $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una proiettività indotta da $\varphi : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ lineare (bigettiva) e $\mathcal{C} = [p]$ una curva proiettiva di grado d , allora poniamo $f_*(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C})$ ²⁴ := $[p \circ \varphi^{-1}]$, dunque f induce $f_* : \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d) \forall d \in \mathbb{N}$.

La buona definizione di f_* discende dai seguenti fatti:

(1) Se p è omogeneo di grado d e φ^{-1} è lineare e invertibile, allora $p \circ \varphi^{-1}$ è anch'esso omogeneo di

$$\text{grado } d \text{ (e } \neq 0 \text{ se } p \neq 0\text{)}. \text{ Se } \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$p \circ \varphi^{-1}(x_0, x_1, x_2) = p(a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

è omogeneo di grado d se p lo è;

(2) Se $p = \lambda p'$, allora $[p \circ \varphi^{-1}] = [\lambda p' \circ \varphi^{-1}] = [p' \circ \varphi^{-1}]$;

(3) Se f è indotta sia da φ che da ψ , allora $\varphi = \lambda\psi$ (vedasi **Teorema 1.3.2** ③), da cui $\varphi^{-1} = \lambda^{-1}\psi^{-1}$ e ancora $[p \circ \varphi^{-1}] = [p \circ \psi^{-1}]$ ²⁵.

Proposizione 1.8.1. *Siano $f, g : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività e \mathcal{C} una curva proiettiva, allora:*

$$1. f(g(\mathcal{C})) = (f \circ g)(\mathcal{C}) \text{ }^{26};$$

$$2. V(f(\mathcal{C})) = f(V(\mathcal{C})).$$

Dimostrazione. (1.) Se f è indotta da φ e g è indotta da ψ , $f \circ g$ è indotta da $\varphi \circ \psi$, per cui, se $\mathcal{C} = [p]$,

$$(f \circ g)(\mathcal{C}) = [p \circ (\varphi \circ \psi)^{-1}] = [p \circ (\psi^{-1} \circ \varphi^{-1})] = [(p \circ \psi^{-1}) \circ \varphi^{-1}] = f([p \circ \psi^{-1}]) = f(g(\mathcal{C}))$$

(2.) Sia $Q = [v]$ un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e φ, p come sopra.

Poiché f è bigettiva, $Q \in f(V(\mathcal{C})) \iff f^{-1}(Q) \in V(\mathcal{C}) \iff [\varphi^{-1}(v)] \in V(\mathcal{C}) \iff p(\varphi^{-1}(v)) = 0 \iff [v] \in V([p \circ \varphi^{-1}]) \iff Q \in V(f(\mathcal{C})).$ \square

Definizione 1.8.1. *Date due curve proiettive \mathcal{C} e \mathcal{C}' , esse si dicono **proiettivamente equivalenti** se $\exists f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ (in particolare, hanno lo stesso grado).*

L'essere proiettivamente equivalenti è una relazione di equivalenza.

Fatto 1.8.2. *Tutte le definizioni date si adattano (diventando più semplici) al caso affine: se $\mathcal{C} = [p]$ è una curva affine e $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ è un'affinità, basta porre $f(\mathcal{C}) = p \circ f^{-1}$ ²⁷.*

In questo contesto valgono (con le stesse dimostrazioni) le proprietà viste sopra:

$$f(g(\mathcal{C})) = (f \circ g)(\mathcal{C}) \text{ e } f(V(\mathcal{C})) = V(f(\mathcal{C}))$$

²³Vorremo che inducesse l'azione "ovvia" sui supporti, cioè, se $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una proiettività e \mathcal{C} è una curva proiettiva, vorremo definire $f(\mathcal{C})$ in modo tale che $V(f(\mathcal{C})) = f(V(\mathcal{C}))$.

²⁴Notazione abusiva, ma usata.

²⁵Il fattore di proporzionalità tra $p \circ \varphi^{-1}$ e $p \circ \psi^{-1}$ è λ^{-d} , non λ^{-1} !

²⁶Cioè $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, come mappe sullo spazio delle curve proiettive di grado d .

²⁷Non bisogna controllare né l'omogeneità dei polinomi né la scelta di rappresentanti a meno di scalari.

1.9 Classificazione proiettiva delle coniche

Definizione 1.9.1. Una **conica** \mathcal{C} è una curva algebrica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di grado 2.

Quindi \mathcal{C} è data da $[f]$, dove (supponendo che $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$)

$$f(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora f si riscrive come $f(x_0, x_1, x_2) = {}^t x A x$, dove $x = (x_0, x_1, x_2)$.

La matrice simmetrica A è detta **associata** alla conica $\mathcal{C} = [f]$.

Osservazione 12. Due matrici simmetriche 3×3 A e B definiscono la stessa conica $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $A = \lambda B$.

Quindi l'insieme delle coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si può identificare con $\mathbb{P}(\mathcal{S}_3)$, dove \mathcal{S}_3 è lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 3×3 .

Quando si parla di coniche d'ora in poi scriviamo $\mathcal{C} = [A]$, con $A \in \mathcal{S}_3 \setminus \{0\}$, intendendo che la matrice A è associata alla conica \mathcal{C} .

Se $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una proiettività data da $g = [M]$, dove $M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$, e \mathcal{C} è la conica associata ad $A \in \mathcal{S}_3$, allora la matrice associata a $g(\mathcal{C})$ è ${}^t M^{-1} A M^{-1}$: infatti, l'equazione di $g(\mathcal{C})$ è data da $[g \circ M^{-1}]$. Visto che $g(x_0, x_1, x_2) = {}^t x A x$, otteniamo

$$g\left(M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = {}^t (M^{-1}x) A (M^{-1}x) = {}^t x \underbrace{{}^t M^{-1} A M^{-1}}_{\text{è la matrice corrispondente a } g(\mathcal{C})} x$$

Proposizione 1.9.1. $A, B \in \mathcal{S}_3 \setminus \{0\}$ definiscono coniche proiettivamente equivalenti se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che A è congruente a λB , cioè $\iff \exists M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ tale che ${}^t M A M = \lambda B$.

Definizione 1.9.2. Sia \mathcal{C} una conica corrispondente ad $A \in \mathcal{S}_3$, il **rango** di \mathcal{C} , $\text{rank } \mathcal{C}$, è il rango della matrice A .

- \mathcal{C} si dice **degenere** se $\text{rank } \mathcal{C} < 3$;
- \mathcal{C} si dice **non-degenere** se $\text{rank } \mathcal{C} = 3$.

Osservazione 13. Il rango è invariante per equivalenza proiettiva perché il rango di A è invariante per congruenza e per moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Osservazione 14. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, indichiamo con $(\underbrace{i_+(A)}_{\text{indice di positività}}, \underbrace{i_-(A)}_{\text{indice di negatività}}, \underbrace{i_0(A)}_{\text{indice di nullità}})$ la **segnatura** di $A \in \mathcal{S}_3$.

$\text{rank } A = 3 - i_0(A)$ e la segnatura è invariante per congruenza.

Inoltre, se B è congruente a λA , con $\lambda \in \mathbb{K}^*$, allora

$$\text{se } \lambda > 0, (i_+(B), i_-(B), i_0(B)) = (i_+(A), i_-(A), i_0(A))$$

$$\text{se } \lambda < 0, (i_+(B), i_-(B), i_0(B)) = (i_-(A), i_+(A), i_0(A))$$

Quindi $|i_+(A) - i_-(A)| = |i_+(B) - i_-(B)|$ e quindi anche questo numero è un invariante per equivalenza proiettiva.

Teorema 1.9.2 (Classificazione proiettiva delle coniche su \mathbb{C}).

Ogni conica proiettiva su \mathbb{C} è proiettivamente equivalente a esattamente una tra

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2] && \text{(non-degenere)} \\ \mathcal{C}_2 &= [x_0^2 + x_1^2] && \text{(rango 2)} \\ \mathcal{C}_3 &= [x_0^2] && \text{(rango 1)} \end{aligned}$$

(il rango è un invariante completo).

Osservazione 15. \mathcal{C}_2 è unione di due rette distinte perché $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$, \mathcal{C}_3 è una “retta doppia” (non è ridotta) e \mathcal{C}_1 è irriducibile (pensateci...).

Dimostrazione. Segue direttamente dal **Teorema di Sylvester complesso**, il quale afferma che le classi di congruenza delle matrici in \mathcal{S}_3 sono tre, rappresentate da $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che danno le tre coniche dell’enunciato. \square

Teorema 1.9.3 (Classificazione proiettiva delle coniche su \mathbb{R}).

Ogni conica proiettiva su \mathbb{R} è proiettivamente equivalente a esattamente una tra

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2] && \text{(non degenerare, “conica vuota”)} \\ \mathcal{C}_2 &= [x_0^2 + x_1^2 - x_2^2] && \text{(non degenerare e non vuota)} \\ \mathcal{C}_3 &= [x_0^2 + x_1^2] && \text{(degenerare, un punto)} \\ \mathcal{C}_4 &= [x_0^2 - x_1^2] && \text{(degenerare, due rette distinte)} \\ \mathcal{C}_5 &= [x_0^2] && \text{(degenerare, retta doppia)} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Usiamo il **Teorema di Sylvester reale** per dire che le classi di congruenza di \mathcal{S}_3 su

$$\mathbb{R} \text{ sono rappresentate da } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A'_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $A'_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notiamo che A_1 e A'_1 , A_2 e A'_2 , A_3 e A'_3 , A_4 e A'_4 danno le stesse coniche,

quindi possiamo trascurare A'_1, A'_2, A'_3 e A'_4 . Inoltre, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 sono a due a due “distinte” dal rango o dall’invariante $|i_+ - i_-|$, quindi le coniche associate non sono a due a due proiettivamente equivalenti. Infine $\mathcal{C}_i = [A_i]$. \square

Esercizio 7. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{C} = [f]$ con $\deg f \geq 1$, allora $V(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Osservazione 16. È possibile che $V(\mathcal{C}) = \emptyset$ anche se \mathcal{C} è definita da un polinomio di grado > 1 , se \mathbb{K} non è algebricamente chiuso.

Esempio 10. Su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la conica $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ ha $V(\mathcal{C}) = \emptyset$. Si può anche prendere $x_0^{2k} + x_1^{2k} + x_2^{2k}$, con $k \in \mathbb{N}$.

Curiosità: In realtà anche in questi casi si può dare “dignità geometrica” a queste curve: si guardano soluzioni di $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ in estensioni $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ (a meno di una relazione di equivalenza...).

Osservazione 17. Le curve di grado 1 e 2 sono “semplici” e siamo riusciti a classificarle completamente (almeno su \mathbb{R} e su \mathbb{C}) a meno di equivalenza proiettiva.

Dal grado 3 in poi non è più così e (almeno su \mathbb{R} o su \mathbb{C}) ci sono infinite classi di equivalenza proiettiva di curve di grado $d \geq 3$.

Esercizi II settimana

Esercizio 6. Si considerino i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dati da

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [0, 1, 0], \quad P_3 = [0, 0, 1], \quad P_4 = [1, 1, 1]$$

$$Q_1 = [1, -1, -1], \quad Q_2 = [1, 3, 1], \quad Q_3 = [1, 1, -1], \quad Q_4 = [1, 1, 1]$$

(1) Si determini una formula esplicita per la proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$;

(2) Si determinino tutte le rette $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = r$.

Dimostrazione. (1) I P_i formano palesemente un riferimento proiettivo, quindi, affinché esista f , bisogna che anche i Q_i lo siano. Basta controllare che i Q_i siano indipendenti a tre a tre. Scegliamo delle basi normalizzate per i due riferimenti: per i P_i prendiamo la base standard e per i Q_i proviamo $v_1 = (1, -1, -1)$, $v_2 = (1, 3, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$: $v_1 + v_2 + v_3 = (3, 3, -1)$ non rappresenta $Q_4 = [1, 1, 1]$. Cerchiamo allora una base normalizzata della forma av_1, bv_2, cv_3 , con $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, imponendo che

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \lambda(1, 1, 1) \iff (a + b + c, -a + 3b + c, -a + b - c) = \lambda(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} a + b + c = -a + 3b + c \\ -a + 3b + c = -a + b - c \end{cases} \quad \rightsquigarrow \text{ad esempio } a = b = 1 \text{ e } c = -1$$

Quindi una base normalizzata rispetto ai Q_i è data da $v_1, v_2, -v_3$.

Per determinare la proiettività, scriviamo la matrice che manda la base normalizzata fissata per i P_i in quella per i Q_i :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ è invertibile e manda } P_i \text{ in } Q_i.$$

(2) Guardiamo gli autospazi di M : il polinomio caratteristico di M è $(1 - \lambda)(\lambda - 2)^2$ ed effettivamente l'autospazio relativo a $\lambda = 2$ ha dimensione 2. Questo vuol dire che i punti fissi di f ($= \text{fix } f$) sono $P \cup s$, dove P è il punto corrispondente agli autovettori di $\lambda = 1$ e s è la retta corrispondente all'autospazio relativo a $\lambda = 2$.

Quindi s sicuramente soddisfa $f(s) = s$. In realtà ogni retta passante per P è tale che $f(r) = r$ perché $f(P) = P$ e $f(Q) = Q$, dove $\{Q\} = r \cap s$.

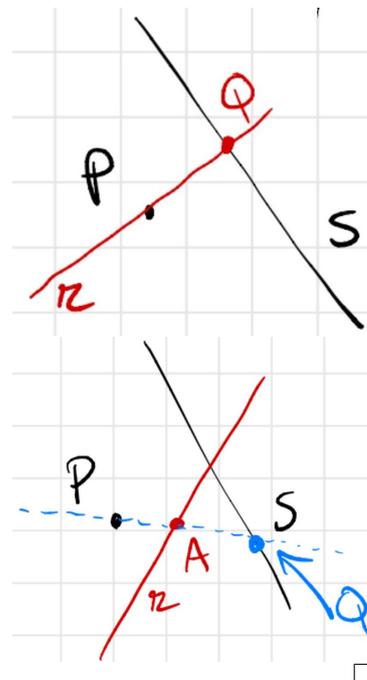
Claim: queste sono le sole rette tali che $f(r) = r$.

Infatti, sia r tale che $f(r) = r$, supponiamo che $r \neq s$ e che $P \notin r$.

Prendiamo $A \in r \setminus s$ e sia $\{Q\} = L(A, P) \cap s$. Sapendo che $f(r) = r$ e che $f(L(A, P)) = L(A, P)$ otteniamo

$$f(A) = f(L(A, P) \cap r) = f(L(A, P)) \cap f(r) = L(A, P) \cap r = \{A\}$$

Quindi $f(A) = A \nmid$ perché stavamo supponendo che $A \notin \{P\} \cup s$.



□

1.10 Curve affini vs curve proiettive

Ricordiamo che stiamo vedendo $\mathbb{K}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tramite $J_0 : \mathbb{K}^2 \longrightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$.
 $(x, y) \longmapsto [1, x, y]$

Definizione 1.10.1. Sia $\mathcal{C} = [F]$ una curva proiettiva di grado $d > 0$, con $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$. La **parte affine**, \mathcal{C}^0 , di \mathcal{C} è la curva affine in \mathbb{K}^2 definita dal polinomio $f(x, y) = F(1, x, y)$ detto **de-omogeneizzato** di F rispetto alla variabile x_0 .

Osservazione 18. Per costruzione, $V(\mathcal{C}^0) = J_0^{-1}(V(\mathcal{C}) \cap U_0)$.

Proposizione 1.10.1. Se $x_0 \nmid F$ (cioè $H_0 = \{x_0 = 0\}$ non è una componente di \mathcal{C}) $\implies \deg f = \deg F$.

Dimostrazione. Se scriviamo $F = \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{ij} x_0^{d-i-j} x_1^i x_2^j$, allora $x_0 \nmid F \iff \exists i_0, j_0$ con $i_0 + j_0 = d$ e $a_{i_0 j_0} \neq 0$. In tal caso, de-omogeneizzando, otteniamo $d = \deg F$, perché compare il monomio $a_{i_0 j_0} x^{i_0} y^{j_0}$ (e non ce ne sono di grado più alto). \square

Se invece $x_0 \mid F$, possiamo scrivere $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^k G(x_0, x_1, x_2)$, con $k \geq 1$, $x_0 \nmid G(x_0, x_1, x_2)$ e $\deg G = \deg F - k$. De-omogeneizzando, otteniamo $f(x, y) = F(1, x, y) = 1^k G(1, x, y) = G(1, x, y)$ che ha grado $\deg G = \deg F - k < \deg F$.

Viceversa,

Definizione 1.10.2. Sia $\mathcal{C} = [f]$ una curva affine in \mathbb{K}^2 di grado $d > 0$, con $f \in \mathbb{K}[x, y]$. La **chiusura proiettiva**, $\overline{\mathcal{C}}$, di \mathcal{C} è la curva proiettiva in \mathbb{K}^2 definita dal polinomio $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ detto **omogeneizzato** di f rispetto alla variabile x_0 .

Proposizione 1.10.2. Questo F è un polinomio omogeneo di grado $d = \deg f$.

Dimostrazione. Se scriviamo $f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j$, allora

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^d \left(\sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{ij} \cdot \frac{x_1^i}{x_0^i} \cdot \frac{x_2^j}{x_0^j} \right) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{ij} x_0^{d-i-j} x_1^i x_2^j$$

che è effettivamente un polinomio omogeneo di grado d . \square

Osservazione 19. Se F è omogeneizzato di un qualche $f(x, y)$ abbiamo che $x_0 \nmid F$, perché, visto che $\deg f = d$, $\exists i_0, j_0$, con $i_0 + j_0 = d$, tali che $a_{i_0 j_0} \neq 0$, quindi nell'omogeneizzato F compare il monomio $x_1^{i_0} x_2^{j_0}$ con coefficiente $\neq 0$ e questo implica che $x_0 \nmid F$. In particolare H_0 non è mai componente della chiusura di una curva affine.

Proposizione 1.10.3. Queste due costruzioni danno una bigezione ($d > 0$ fissato)

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Curve affini in } \mathbb{K}^2 \\ \text{di grado } d \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{Curve proiettive in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \text{ di grado } d, \\ \text{senza } H_0 \text{ come componente} \end{array} \right\} \\ \mathcal{C} & \longmapsto & \overline{\mathcal{C}} \\ \mathcal{D}^0 & \longleftarrow & \mathcal{D} \end{array}$$

Dimostrazione. Vale $(\overline{\mathcal{C}})^0 = \mathcal{C}$, perché il de-omogeneizzato del polinomio $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ è proprio $F(1, x, y) = 1^d f\left(\frac{x}{1}, \frac{y}{1}\right) = f(x, y)$.

Per l'altra composizione, dobbiamo verificare che se \mathcal{D} è una retta proiettiva di cui H_0 non è componente, allora $(\mathcal{D}^0) = \mathcal{D}$. Vale la seguente identità:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d F\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \quad d = \deg F(x_0, x_1, x_2)$$

Basta controllarla sui monomi: per il monomio $A \cdot x_0^a x_1^b x_2^{d-a-b}$ vale l'identità

$$A \cdot x_0^a x_1^b x_2^{d-a-b} = x_0^d \cdot A \cdot 1^a \cdot \frac{x_1^b}{x_0^b} \cdot \frac{x_2^{d-a-b}}{x_0^{d-a-b}} \checkmark$$

Quindi se $\deg f(x, y) = d = \deg F$ (segue dall'ipotesi $x_0 \nmid F$) (dove $f(x, y) = F(1, x, y)$), allora l'omogeneizzato di $f(x, y)$ è proprio

$$x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^d F\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = F(x_0, x_1, x_2)$$

Quindi questo mostra che $\overline{(\mathcal{D}^0)} = \mathcal{D}$, se H_0 non è una componente di \mathcal{D} . □

Osservazione 20. Se H_0 è componente di \mathcal{D} , qualcosa va storto.

Esempio 11. Se \mathcal{D} è definita da $x_0(x_0^2 + x_1^2 + x_0x_2) = F(x_0, x_1, x_2)$, $\deg F = 3$, H_0 è componente di \mathcal{D} . La parte affine \mathcal{D}^0 è definita dal polinomio

$$f(x, y) = F(1, x, y) = 1(1 + x^2 + 1 \cdot y) = 1 + x^2 + y \quad \deg f = 2 < \deg F = 3.$$

Omogeneizzando f otteniamo

$$G(x_0, x_1, x_2) = x_0^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^2 \left(1 + \frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^2 + x_1^2 + x_0x_2$$

che è diverso dal polinomio di partenza (il supporto della curva ha perso la componente H_0).

Definizione 1.10.3. I punti all'infinito della curva affine \mathcal{C} sono $V(\overline{\mathcal{C}}) \cap H_0 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

Proposizione 1.10.4. Se \mathcal{C} è una curva affine di grado d , allora

- $\#(V(\overline{\mathcal{C}}) \cap H_0) \leq d$;
- se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, abbiamo $V(\overline{\mathcal{C}}) \cap H_0 \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Scriviamo $\mathcal{C} = [f]$ e sia F l'omogeneizzato di f cosicché $\overline{\mathcal{C}} = [F]$. I punti di $V(\overline{\mathcal{C}}) \cap H_0$ sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$. Sia $G(x_1, x_2) = F(0, x_1, x_2)$. Questo è un polinomio

omogeneo di grado d nelle variabili x_1, x_2 , non identicamente nullo (perché $x_0 \nmid F$). Dobbiamo studiare le soluzioni di $G(x_1, x_2) = 0$.

Scriviamo $G(x_1, x_2) = x_1^k G_1(x_1, x_2)$, dove $k \geq 0$ e $x_1 \nmid G_1(x_1, x_2)$, e sia $g_1(t) = G_1(1, t)$, in cui si ha $\deg g_1 = \deg G_1$ (se $G_1(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^d a_i x_1^i x_2^{d-i}$, allora $x_1 \nmid G \iff a_0 \neq 0$ e inoltre $g_1(1, t) = \sum_{i=0}^d a_i t^{d-i}$ ha grado d con termine di testa $a_0 t^d$).

Ora, le soluzioni $[x_1, x_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ di $G(x_1, x_2)$ sono:

- $[0, 1]$ se $k \geq 1$;
- $[1, x_0]$, dove $x_0 \in \mathbb{K}$ è una radice di $g_1(t)$.

queste soluzioni sono al più d , perché, se $k \geq 1$, allora $\deg g_1 = \deg G_1 < \deg G = d$, quindi le soluzioni sono al più $1 + \deg g_1 < 1 + d$.

Inoltre, se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, il polinomio $g_1(t)$ ha almeno una radice in \mathbb{K} che dà un punto all'infinito di \mathcal{C} . □

In realtà questo ragionamento praticamente dimostra anche il seguente

Corollario 1.10.5. Dati una curva proiettiva \mathcal{D} di grado d e una retta $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che non sia componente di \mathcal{D} , si ha $\#(V(\mathcal{D}) \cap \ell) \leq d$ e, se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, allora $V(\mathcal{D}) \cap \ell \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Applicando una proiettività opportuna di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (che non influisce sulla tesi del corollario) che porta la retta ℓ nella retta H_0 , abbiamo una curva \mathcal{D}' che non ha H_0 come componente. Quindi $\mathcal{D}' = \overline{(\mathcal{D}')^0}$ e, per la **Proposizione 1.10.4**, $\#(V(\underbrace{\overline{(\mathcal{D}')^0}}_{\mathcal{D}'} \cap H_0)) \leq d$ e, se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, allora

$V(\overline{(\mathcal{D}')^0}) \cap H_0 \neq \emptyset$. Da questo segue la tesi. \square

Corollario 1.10.6. *Dati \mathcal{D} una curva proiettiva di grado d e $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una retta, se $\#(V(\mathcal{D}) \cap \ell) > d$, allora ℓ è necessariamente una componente di \mathcal{D} .*

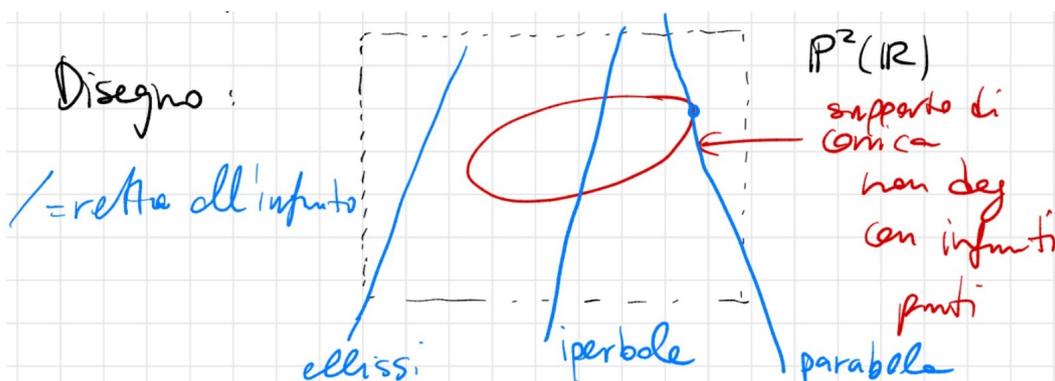
Esempio 12. *Il grafico di $\sin(x)$ non può essere il supporto di una curva algebrica su \mathbb{R} perché interseca l'asse x in infiniti punti e comunque l'asse x non è componente del grafico di $\sin x$. Segue che $\nexists p(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$, con $\deg p \geq 1$, tale che $p(x, \sin(x)) \equiv 0$.*

Osservazione 21. *In tutto questo discorso si può “mettere all'infinito” una qualsiasi retta $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, cambiando coordinate con una proiettività. Ad esempio, se vogliamo mettere all'infinito $H_1 = \{x_1 = 0\}$ o $H_2 = \{x_2 = 0\}$ basta de-omogeneizzare per x_1 o x_2 invece che per x_0 .*

Esempio 13. *Se vediamo una retta $\ell \subseteq \mathbb{K}^2$ come una curva algebrica di grado 1, la sua chiusura proiettiva coincide con la chiusura proiettiva come sottospazio affine.*

Esempio 14. *Coniche su \mathbb{R} :*

La chiusura proiettiva di una curva affine è una conica proiettiva. Visto che c'è “una” sola conica non degenera con infiniti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, segue che le chiusure proiettive di ellissi, parabole e iperboli sono proiettivamente equivalenti.



Esercizio 8. *Calcolare esplicitamente i punti all'infinito di $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ e $x - y^2 = 0$.*

1.11 Rette tangenti e molteplicità di intersezione

Esempio 15. La retta $x = 1$ è tangente alla circonferenza unitaria nel punto $(1, 0)$.

Risolvendo $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ si trova $y^2 = 0$ e il fatto che la

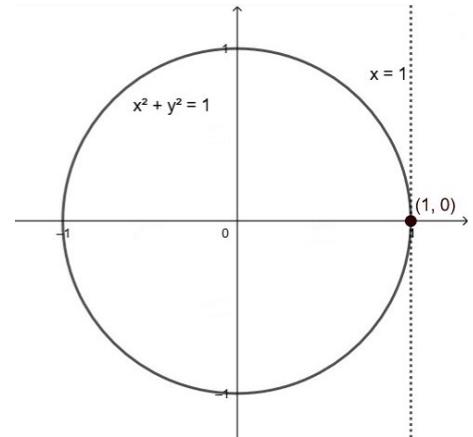
radice $y = 0$ sia doppia “rappresenta” la tangenza.

In generale, sia $\mathcal{C} = [f]$ una curva affine e $\ell \subseteq \mathbb{K}^2$ una retta.

Rappresentiamo ℓ in modo parametrico come $\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases}$,

dove $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, e t è un parametro che assume valori in \mathbb{K} .

I punti di $V(\mathcal{C}) \cap \ell$ corrispondono alle radici del polinomio $p(t) = f(a + \alpha t, b + \beta t)$.



Definizione 1.11.1. La **molteplicità di intersezione** di $\mathcal{C} = [p]$ ed ℓ in $P_0 \in \ell$ ²⁸ è

$$I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = \text{“molteplicità di } t_0 \text{ come zero di } p(t)\text{”} = \sup\{k \in \mathbb{N} : (t - t_0)^k \mid p(t)\}$$

Osservazione 22. • $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = 0 \iff P_0 \notin V(\mathcal{C}) \cap \ell$;

• $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) \geq 1 \iff P_0 \in V(\mathcal{C}) \cap \ell$;

• se ℓ è componente di \mathcal{C} , allora $p(t)$ è il polinomio nullo. In tal caso $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = +\infty$.

Proposizione 1.11.1. Con la notazione di sopra: ℓ è componente di $\mathcal{C} \iff p(t)$ è il polinomio nullo.

Dimostrazione. (\implies) Ovvio: per un’equazione cartesiana $g(x, y) = 0$, il polinomio $g(x, y)$ è fattore di $f(x, y)$, quindi, sostituendo $x = a + \alpha t$ e $y = b + \beta t$, troviamo che $g(a + \alpha t, b + \beta t)$ è il polinomio nullo, quindi anche $f(a + \alpha t, b + \beta t)$ è il polinomio nullo.

(\impliedby) Applicando un’affinità al problema, possiamo supporre che ℓ sia la retta $x = 0$, cioè $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$.

Scriviamo $f(x, y) = xg(x, y) + h(y)$ e quindi troviamo $p(t) = f(0, t) = 0g(0, t) + h(t) = h(t)$.

Ora basta osservare che $x \mid f(x, y) \iff h(y)$ è il polinomio nullo, perciò se $p(t) = h(t)$ è il polinomio nullo, segue che $x = 0$ è componente di $[f]$. \square

Osservazione 23. Bisognerebbe verificare che $I(\mathcal{C}, \ell, P_0)$ è indipendente dalla parametrizzazione scelta di ℓ . Lo verifichiamo tra poco nel caso proiettivo, da cui seguirà anche nel caso affine.

Definizione 1.11.2. Se $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) \geq 2$, allora diciamo che ℓ è **tangente** a \mathcal{C} in $P_0 \in V(\mathcal{C}) \cap \ell$.

Ora vediamo l’analogo proiettivo.

Sia $\mathcal{C} = [F]$ una curva proiettiva, $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ e $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una retta. Scegliamo $P, Q \in \ell$ distinti, $P = [v], Q = [w]$ con $v, w \in H_\ell \subseteq \mathbb{K}^3$. $P \neq Q$, visto che v e w sono linearmente indipendenti, dunque danno una base di H_ℓ (= sottospazio vettoriale corrispondente a ℓ).

Il punto generico della retta ℓ si scrive $P_{\lambda, \mu} = [\lambda v + \mu w]$, con $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

I punti di $V(\mathcal{C}) \cap \ell$ corrispondono alle soluzioni dell’equazione $F(\lambda v + \mu w) = 0$; poniamo

$$G(\lambda, \mu) = F(\lambda v_0 + \mu w_0, \lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$$

con $v = (v_0, v_1, v_2)$ e $w = (w_0, w_1, w_2)$.

Tale $G(\lambda, \mu)$ è un polinomio omogeneo di grado $\deg F$ (a meno che non sia il polinomio nullo).

Abbiamo che $P_0 = [\lambda_0 v + \mu_0 w] \in V(\mathcal{C}) \cap \ell \iff G(\lambda_0, \mu_0) = 0$.

Vedremo tra un attimo che $G(\lambda_0, \mu_0) = 0 \iff (\lambda \mu_0 - \mu \lambda_0) \mid G(\lambda, \mu)$.

²⁸Cioè P_0 ha coordinate $(x = a + \alpha t_0, y = b + \beta t_0)$, con $t_0 \in \mathbb{K}$.

Definizione 1.11.3. La molteplicità di intersezione di \mathcal{C} e ℓ in $P_0 \in \ell$ è $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) =$ molteplicità di $[\lambda_0, \mu_0]$ come radice di $G(\lambda, \mu)$:

$$I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = \sup\{k \in \mathbb{N} : (\lambda\mu_0 - \mu\lambda_0)^k \mid G(\lambda, \mu)\}$$

Osservazione 24. Anche in questo caso:

- $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = 0 \iff P_0 \notin V(\mathcal{C}) \cap \ell$;
- $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) \geq 1 \iff P_0 \in V(\mathcal{C}) \cap \ell$;
- se ℓ è componente di \mathcal{C} , abbiamo $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = +\infty$.

Esercizio 9. Controllare che ℓ è componente di $\mathcal{C} \iff G(\lambda, \mu)$ è il polinomio nullo.

Proposizione 1.11.2. Se $G(\lambda, \mu)$ è un polinomio omogeneo, allora

- 1) $G(\lambda_0, \mu_0) = 0 \iff (\lambda\mu_0 - \mu\lambda_0) \mid G(\lambda, \mu)$;
- 2) Se $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$, $G(\lambda, \mu)$ si scompone completamente in fattori lineari;
- 3) se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $G(\lambda, \mu)$ si scompone in fattori lineari o di grado 2.

Dimostrazione. 1) Se $\lambda_0 = 0$ (quindi $\mu_0 \neq 0$), dobbiamo far vedere che $G(0, \mu_0) = 0 \iff \lambda \mid G(\lambda, \mu)$.

Scriviamo $G(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^d a_i \lambda^i \mu^{d-i}$, con $d = \deg G$, da cui $G(0, \mu_0) = a_0 \mu_0^d = 0 \iff a_0 = 0$ e d'altra parte $a_0 = 0 \iff \lambda \mid G(\lambda, \mu)$.

Se $\lambda_0 \neq 0$, abbiamo $G(\lambda_0, \mu_0) = 0 \iff G(1, \frac{\mu_0}{\lambda_0}) = 0$ ²⁹.

Poniamo $g(x) = G(1, x)$, per cui $G(\lambda, \mu) = \lambda^d g(\frac{\mu}{\lambda})$, con $d = \deg G$, (controllarla sui monomi). Adesso per $g(x)$ sappiamo che $g(\frac{\mu_0}{\lambda_0}) = 0 \iff \frac{1}{\lambda_0}(\lambda_0 x - \mu_0) = (x, \frac{\mu_0}{\lambda_0}) \mid g(x)$ e, omogeneizzando, segue la tesi. 2) e 3) seguono direttamente da quanto visto: $G(\lambda, \mu) = \lambda^k G_1(\lambda, \mu)$, con $k \in \mathbb{N}$, e, de-omogeneizzando $G_1(\lambda, \mu)$, se $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$, $g(x)$ si spezza completamente in fattori lineari perciò, ri-omogeneizzando, segue che anche $G_1(\lambda, \mu)$ si spezza completamente in fattori lineari; se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $g(x)$ si spezza in fattori lineari o di grado 2, quindi lo stesso per $G_1(\lambda, \mu)$. \square

Proposizione 1.11.3. Il numero $I(\mathcal{C}, \ell, P_0)$:

- non dipende da come parametrizziamo ℓ , cioè dalla scelta di v, w ;
- è invariante per proiettività, cioè se $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una proiettività, allora

$$I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = I(f(\mathcal{C}), f(\ell), f(P_0))$$

Dimostrazione. • Se v', w' è una seconda base di $H_\ell \subseteq \mathbb{K}^3$, allora $\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ matrice tale

che $\lambda v + \mu w = \lambda' v' + \mu' w' \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ e il polinomio $G'(\lambda', \mu') = F(\lambda' v' + \mu' w')$ si ottiene dal polinomio $G(\lambda, \mu)$ tramite la sostituzione lineare $\lambda = a\lambda' + b\mu'$ e $\mu = c\lambda' + d\mu'$ (perché $G'(\lambda', \mu') = F(\lambda' v' + \mu' w') = F(\lambda v + \mu w) = G(\lambda, \mu)$) e questa sostituzione lineare (invertibile) delle variabili dà una corrispondenza biunivoca tra i fattori dei polinomi $G(\lambda, \mu)$ e $G'(\lambda', \mu')$, che manda il polinomio $\lambda\mu_0 - \mu\lambda_0$ (a meno di una costante $\neq 0$) nel polinomio $\lambda'\mu'_0 + \mu'\lambda'_0$ ³⁰.

Esercizio 10 (Parentesi). - Se $G(\lambda, \mu)$ è omogeneo, allora il polinomio omogeneo

$$H(\lambda', \mu') = G(a\lambda' + b\mu', c\lambda' + d\mu')$$

ha grado $\leq d = \deg G$;

²⁹Perché $G(\lambda, \mu)$ è omogeneo, quindi $G(\lambda_0, \mu_0) = \lambda_0^d G(1, \frac{\mu_0}{\lambda_0})$.

³⁰Dove $[\lambda_0, \mu_0] \iff P_0$ per v, w e $[\lambda'_0, \mu'_0] \iff P_0$ per v', w' .

- Applicando ad H la sostituzione inversa, riotteniamo G . Questo implica che $\deg H = d$;
- Da questo segue che polinomi irriducibili vengono trasformati in polinomi irriducibili e che questa operazione dà una bigezione tra i fattori di $G(\lambda, \mu)$ e di $H(\lambda', \mu')$.

Da tutto ciò segue che la molteplicità di $[\lambda_0, \mu_0]$ in $G(\lambda, \mu)$ è uguale a quella di $[\lambda'_0, \mu'_0]$ in $G'(\lambda', \mu')$. Scegliamo $P = [v]$, $Q = [w]$ in ℓ distinti e $M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ che rappresenti $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e scriviamo $\mathcal{C} = [F]$. $f(P) = [Mv]$, $f(Q) = [Mw]$ stanno su $f(\ell)$ e $f(\mathcal{C})$ ha equazione $F \circ M^{-1}$. Scriviamo il punto generico di $f(\ell)$ come $[\lambda(Mv) + \mu(Mw)] = [M(\lambda v + \mu w)]$. Ora, $I(f(\mathcal{C}), f(\ell), f(P))$ è la molteplicità di $[1, 0]$ nel polinomio

$$(\text{equazione di } f(\mathcal{C}))(\text{punto generico di } f(\ell)) = F(M^{-1}(M(\lambda v + \mu w))) = F(\lambda v + \mu w)$$

Questo è lo stesso polinomio che usiamo per calcolare $I(\mathcal{C}, \ell, P)$ (sempre per $[1, 0]$) da cui segue la tesi. \square

Ora controlliamo che la nozione affine e quella proiettiva sono compatibili. Sia $\mathcal{C} = [f]$ una curva affine, $\ell \subseteq \mathbb{K}^2$ una retta e $P_0 \in \ell$. Prendiamo la chiusura proiettiva $\bar{\mathcal{C}} = [F]$ ³¹, $\bar{\ell} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Vogliamo vedere che $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) = I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{\ell}, P_0)$.

$$\begin{matrix} \text{in } \mathbb{K}^2 & & \text{in } \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \end{matrix}$$

Dimostrazione. Scriviamo $\ell = \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases}$, dove P_0 ha coordinate $(x = a + \alpha t_0, y = b + \beta t_0)$, con

$t_0 \in \mathbb{K}$. $\bar{\ell}$ si può parametrizzare come $\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = a\lambda + \alpha\mu \\ x_2 = b\lambda + \beta\mu \end{cases}$, perché il punto $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ corrisponde a

$[1, a, b]$ e il punto all'infinito della retta ℓ ha coordinate $[0, \alpha, \beta]$.

$I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{\ell}, P_0)$ è la molteplicità di $[1, t_0] \leftrightarrow P_0$ nel polinomio $F(\lambda, a\lambda + \alpha\mu, b\lambda + \beta\mu)$.

$I(\mathcal{C}, \ell, P_0)$ è la molteplicità di $t = t_0$ nel polinomio $f(a + \alpha t, b + \beta t)$.

Ora, la molteplicità di $[1, t_0]$ in $F(\lambda, a\lambda + \alpha\mu, b\lambda + \beta\mu)$ è uguale alla molteplicità di $x = t_0$ in $F(1, a + \alpha x, b + \beta x) = f(a + \alpha x, b + \beta x)$ e questo dà la tesi. \square

Da questo segue che anche nel caso affine $I(\mathcal{C}, \ell, P_0)$ non dipende dalla parametrizzazione della retta.

Proposizione 1.11.4. *Se \mathcal{C} è una curva proiettiva di grado d e ℓ è una retta che non sia componente di \mathcal{C} , allora*

$$\sum_{P \in V(\mathcal{C}) \cap \ell} I(\mathcal{C}, \ell, P) \leq d \text{ e, se } \mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}, \text{ vale l'uguaglianza.}$$

Dimostrazione. Segue dalla definizione di molteplicità e dal fatto che $G(\lambda, \mu)$ ha al più d fattori lineari e, se $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$, ne ha esattamente d . \square

Corollario 1.11.5. *Date \mathcal{C} una curva affine di grado d e $\ell \subseteq \mathbb{K}^2$ una retta che non sia componente di \mathcal{C} , allora*

$$\sum_{P \in V(\mathcal{C}) \cap \ell} I(\mathcal{C}, \ell, P) \leq d$$

Inoltre, se $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$, vale l'uguaglianza \iff il punto all'infinito di ℓ non sta in $V(\bar{\mathcal{C}})$.

Dimostrazione. Segue direttamente dalla **Proposizione 1.11.4** usando l'uguaglianza della molteplicità affine e proiettiva. \square

Definizione 1.11.4. *Se \mathcal{C} è una curva proiettiva e $\ell \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una retta, allora, se $I(\mathcal{C}, \ell, P_0) \geq 2$, si dice che ℓ è **tangente** a \mathcal{C} in P_0 .*

³¹In cui F è l'omogeneizzato di f .

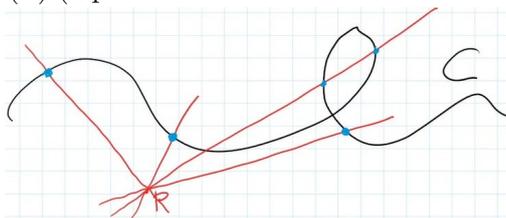
Esercizi III settimana

Esercizio 10. Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e sia \mathcal{C} una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di grado positivo. Si mostri che $V(\mathcal{C})$ è un insieme infinito.

Dimostrazione. Poiché $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, \mathbb{K} è infinito. Se fosse $V(\mathcal{C}) = \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (a posteriori dell'**Esercizio 11** sarà impossibile), allora $|V(\mathcal{C})| = |\mathbb{P}^2(\mathbb{K})| = +\infty$.

Altrimenti, $\exists P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus V(\mathcal{C})$ e scegliamo le coordinate in modo che $P = [1, 0, 0]$. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ consideriamo la retta r_α di equazione $x_1 + \alpha x_2 = 0$ passante per P e, se $\alpha \neq \beta$, $r_\alpha \neq r_\beta$. Per quanto visto in precedenza, visto che $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\exists P_\alpha \in r_\alpha \cap V(\mathcal{C})$.

Per concludere, basta osservare che, se $\alpha \neq \beta$, allora $P_\alpha \neq P_\beta$, perché altrimenti, usando il fatto che $P \notin V(\mathcal{C})$, dunque $P \neq P_\alpha$ e $P \neq P_\beta$, avremmo $r_\alpha = L(P, P_\alpha) = L(P, P_\beta) = r_\beta$. \square



Esercizio 11. (1) Sia \mathbb{K} un campo infinito e sia \mathcal{C} una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si mostri che $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus V(\mathcal{C})$ è un insieme infinito.

Dimostrazione. (1) Siano $P = [1, 0, 0]$ e r_α , con $\alpha \in \mathbb{K}$, come sopra.

Se, per assurdo, $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus V(\mathcal{C})$ fosse finito, allora anche $|r_\alpha \setminus V(\mathcal{C})| < +\infty$, da cui $|r_\alpha \cap V(\mathcal{C})| = +\infty$, visto che $|\mathbb{K}| = +\infty$, cioè, in particolare, $|r_\alpha \cap V(\mathcal{C})| > \deg \mathcal{C}$. Perciò, per quanto già visto, r_α sarebbe una componente di \mathcal{C} , ma quindi \mathcal{C} avrebbe infinite componenti irriducibili distinte (cioè \mathcal{C} dovrebbe avere “grado infinito”), il che è assurdo. \square

Esercizio 13. Siano P_1, \dots, P_5 cinque punti in posizione generale in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si mostri che esiste un'unica conica proiettiva \mathcal{C} tale che $V(\mathcal{C})$ contiene tutti i punti P_1, \dots, P_5 e tale conica è non degenera (i.e. irriducibile).

Dimostrazione. Scegliamo le coordinate in modo che

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [0, 1, 0], \quad P_3 = [0, 0, 1], \quad P_4 = [1, 1, 1], \quad P_5 = [a, b, c]$$

(per ipotesi P_1, P_2, P_3, P_4 formano un riferimento proiettivo).

Sia A la matrice che rappresenta una conica \mathcal{C} passante per i P_i , con $i = 1, \dots, 5$, $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{K})$.

Se e_i è l' i -esimo vettore della base canonica, allora $P_i \in V(\mathcal{C}) \implies {}^t e_i A e_i = 0$, cioè $a_{ii} = 0$, ossia A ha

zeri sulla diagonale: $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$. Ora abbiamo $[1, 1, 1] \in V(\mathcal{C})$, perciò

$$(1 \ 1 \ 1) A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \gamma \\ \beta + \gamma \end{pmatrix} = 0$$

da cui, $2(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \implies \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 0}$ (supponiamo $\text{char } \mathbb{K} = 0$).

Il passaggio per $[a, b, c]$ dà

$$(a \ b \ c) A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} \alpha b + \beta c \\ \alpha a + \gamma c \\ \beta a + \gamma b \end{pmatrix} = 2(\alpha ab + \beta ac + \gamma bc) = 0$$

Dunque le coniche passanti per i P_i hanno equazione $\alpha x_0 x_1 + \beta x_0 x_2 + \gamma x_1 x_2 = 0$, con

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & a, b, c \text{ sono parametri fissati} \\ \alpha ab + \beta ac + \gamma bc = 0 & \alpha, \beta, \gamma \text{ sono le incognite.} \end{cases}$$

Per concludere che $\exists!$ \mathcal{C} conica tale che $P_i \in V(\mathcal{C}) \forall i = 1, \dots, 5$, dobbiamo mostrare che questo sistema abbia rango 2, cioè lo spazio delle soluzioni (in α, β, γ) sia 1-dimensionale, per cui il suo proiettivizzato

sia un punto (in altre parole, la terna $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ che risolve il sistema deve essere unica, a meno di scalari).

Osserviamo che, poiché $P_5 = [a, b, c] \notin L(P_1, P_2) = \{x_2 = 0\}$, abbiamo $c \neq 0$. Analogamente, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, dunque $\alpha ab + \beta ac + \gamma bc = 0 \iff \frac{1}{c}\alpha + \frac{1}{b}\beta + \frac{1}{a}\gamma = 0$ e possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \frac{1}{c}\alpha + \frac{1}{b}\beta + \frac{1}{a}\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{che ha rango} < 2 \iff (1, 1, 1) \text{ e } \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right) \text{ sono multipli l'uno dell'altro, cioè}$$

$a = b = c$, cosa vietata perché $P_5 = [a, b, c] \neq [1, 1, 1] = P_4$.

Questo mostra esistenza e unicità della conica passante per i P_i .

Se \mathcal{C} fosse riducibile, allora dovremmo avere $\mathcal{C} = r_1 + r_2$, con r_1, r_2 rette (dato che $\deg \mathcal{C} = 2$).

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in r_1 \cup r_2$, per cui, per il **Principio dei cassetti**, $\exists i \in \{1, 2\}$ tale che r_i contenga almeno tre punti tra i P_j , ma questo è assurdo perché i P_j sono a tre a tre non allineati.

Perciò \mathcal{C} è irriducibile. □

Osservazione 25. *Se i P_i sono distinti ma non in posizione generale, allora tre di essi, diciamo P_1, P_2, P_3 , sono allineati, cioè giacciono su una stessa retta r , quindi $|V(\mathcal{C}) \cap r| \geq 3 > \deg \mathcal{C}$, dunque r è una componente di \mathcal{C} e \mathcal{C} è riducibile.*

1.12 Punti lisci e singolari

Nello spazio affine \mathbb{R}^2 , sia $\mathcal{C} = [y^2 - x^3]$, cioè la curva di equazione $y^2 = x^3$. Al variare di r tra le rette passanti per $O = (0,0)$ calcoliamo $I(\mathcal{C}, r, O)$. La generica retta passante per l'origine ha equazione $\alpha x + \beta y = 0$, con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, ed è parametrizzata da $t \mapsto (-\beta t, \alpha t)$. Chiamiamo $r_{\alpha, \beta}$ questa retta.

Per calcolare $I(\mathcal{C}, r_{\alpha, \beta}, O)$, sostituiamo $(-\beta t, \alpha t)$ nell'equazione di \mathcal{C} , ottenendo

$$y^2 - x^3 = \alpha^2 t^2 + \beta^3 t^3 = t^2(\alpha^2 + \beta^3 t)$$

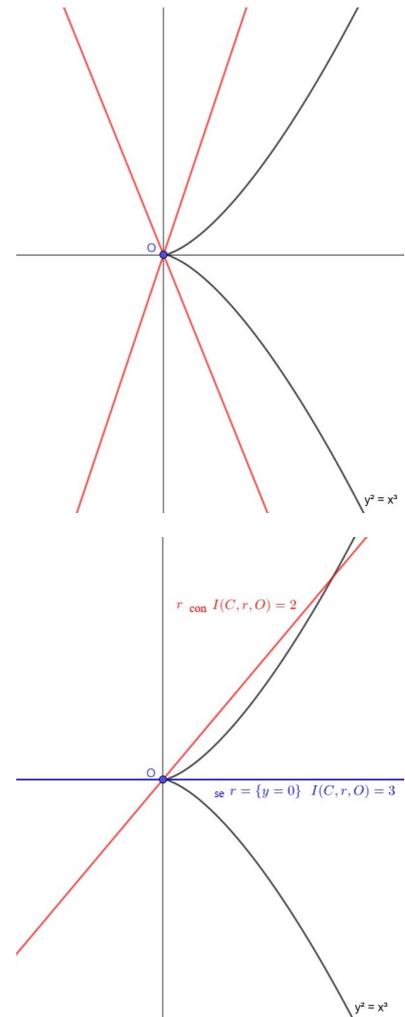
La retta $r_{\alpha, \beta}$ passa da O per $t = 0$, dunque dobbiamo vedere la molteplicità di 0 come radice di $t^2(\alpha^2 + \beta^3 t)$. Ci sono due casi:

- ① Se $\alpha \neq 0$, $I(\mathcal{C}, r_{\alpha, \beta}, O) = 2$;
- ② Se $\alpha = 0$ (e necessariamente $\beta \neq 0$ perché $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$), $t^2(\alpha^2 + \beta^3 t) = \beta^3 t^3$ e $I(\mathcal{C}, r_{\alpha, \beta}, O) = 3$.

Ricordiamo che in generale, una retta r è tangente a una curva \mathcal{C} in $P \iff I(\mathcal{C}, r, P) \geq 2$.

Dunque, se $\mathcal{C} = \{y^2 = x^3\}$, **tutte le rette per l'origine sono tangenti a \mathcal{C} nell'origine!**

C'è una retta "più tangente" (cioè con molteplicità di intersezione maggiore delle altre): la retta $y = 0$ (che visivamente sembrerebbe l'unica tangente a \mathcal{C} in O).



Definizione 1.12.1. Siano \mathcal{C} curva (affine o proiettiva) e P un punto (di \mathbb{K}^2 o $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$), la **molteplicità** di \mathcal{C} in P (o di P per \mathcal{C}) è

$$m_P(\mathcal{C}) = \min\{I(\mathcal{C}, r, P), \text{ con } r \text{ retta passante per } P\}$$

Osserviamo che $m_P(\mathcal{C}) = 0 \iff P \notin V(\mathcal{C})$ e perciò $m_P(\mathcal{C}) \geq 1 \iff P \in V(\mathcal{C})$. Nel caso della cuspidè studiata sopra, $m_O(\mathcal{C}) = 2$.

Definizione 1.12.2. Se $m_P(\mathcal{C}) \geq 2$, $P \in V(\mathcal{C})$ si dice **singolare** per \mathcal{C} .

Se $m_P(\mathcal{C}) = 1$, $P \in V(\mathcal{C})$ si dice **non singolare (liscio o regolare)** per \mathcal{C} .

L'origine è un punto singolare della curva $y^2 = x^3$ in \mathbb{R}^2 .

Un punto è singolare \iff tutte le rette passanti per il punto sono tangenti alla curva nel punto.

Definizione 1.12.3. Una curva algebrica \mathcal{C} si dice **liscia** se ogni suo punto è un punto liscio per \mathcal{C} , si dice invece **singolare** se contiene almeno un punto singolare.

Proposizione 1.12.1. Siano \mathcal{C} una curva affine e $P \in \mathbb{K}^2$ un punto. Se pensiamo $\mathbb{K}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tramite $J_0 : \mathbb{K}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, allora $m_P(\mathcal{C}) = m_P(\bar{\mathcal{C}})$ ³².

Dimostrazione. Discende direttamente dal fatto che $I(\mathcal{C}, r, P) = I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}, P) \forall r$ retta affine passante per P e che c'è una bigezione tra le rette affini passanti per P e le rette proiettive passanti per P . \square

Come capire se P è liscio per \mathcal{C} ?

³²In particolare, P è liscio per \mathcal{C} se e solo se lo è per $\bar{\mathcal{C}}$.

1.13 Punti singolari e gradiente

Caso affine

Sia $f \in \mathbb{K}[x, y]$ un'equazione della curva \mathcal{C} .

Chiamiamo f_x, f_y le derivate parziali formali di f rispetto a x, y : il **gradiente** di f è $\nabla f = (f_x \ f_y)$.

Teorema 1.13.1. *Siano $\mathcal{C} = [f]$ una curva affine e $P \in V(\mathcal{C})$ un punto, allora*

① P è liscio per $\mathcal{C} \iff \nabla f(P) \neq (0 \ 0)$.

② Se $P = (a, b)$ è liscio, allora $\exists!$ retta tangente a \mathcal{C} in P ; tale retta ha equazione

$$f_x(P) \cdot (x - a) + f_y(P) \cdot (y - b) = 0$$

Dimostrazione. ① Una retta r passante per $P = (a, b)$ è parametrizzata da $\gamma : t \mapsto (a + \alpha t, b + \beta t)$, con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Per calcolare $I(\mathcal{C}, r, P)$, dobbiamo calcolare il minimo della molteplicità di 0 come radice della funzione $g(t) = f(\gamma(t))$. Tale molteplicità è $\geq 2 \iff g(0) = g'(0) = 0$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte (vale anche per la derivata formale di polinomi!),

$$g'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

che, per $t = 0$, dà $g'(0) = \nabla f(P) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha f_x(P) + \beta f_y(P)$.

$P \in V(\mathcal{C}) \iff g(0) = 0$. Dunque P è singolare $\iff g'(0) = 0$ per qualsiasi scelta della retta $r \iff$

$$\alpha f_x(P) + \beta f_y(P) \stackrel{\star}{=} 0 \ \forall (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \iff f_x(P) = f_y(P) = 0 \iff \nabla f(P) = (0 \ 0)$$

② Supponiamo ora $\nabla f(P) \neq (0 \ 0)$. L'uguaglianza \star ci dice che r è tangente a \mathcal{C} in $P \iff$ la sua giacitura, che è generata da (α, β) , ha equazione $f_x(P)x + f_y(P)y = 0$.

Dunque esiste un'unica retta (affine) tangente a \mathcal{C} in P : essa è l'unica retta affine passante per $(a, b) = P$ e parallela alla retta $f_x(P)x + f_y(P)y = 0$.

Dunque l'unica retta tangente a \mathcal{C} in P ha equazione $f_x(P) \cdot (x - a) + f_y(P) \cdot (y - b) = 0$. \square

Caso proiettivo

Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ un'equazione della curva \mathcal{C} .

Chiamiamo F_{x_i} la derivata parziale di F rispetto a x_i : il **gradiente** di F è $\nabla F = (F_{x_0} \ F_{x_1} \ F_{x_2})$

Teorema 1.13.2. *Siano $\mathcal{C} = [F]$ una curva proiettiva e $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ un punto ³³, con $\text{char } \mathbb{K} = 0$, allora:*

① P è singolare per $\mathcal{C} \iff \nabla F(P) = (0 \ 0 \ 0)$.

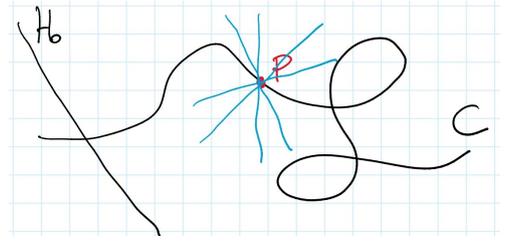
② Se $P \in V(\mathcal{C})$ e $\nabla F(P) \neq (0 \ 0 \ 0)$, allora $\exists!$ retta tangente a \mathcal{C} in P di equazione

$$F_{x_0}(P)x_0 + F_{x_1}(P)x_1 + F_{x_2}(P)x_2 = 0$$

Dimostrazione. ① Sia $P = [a, b, c]$ e, senza perdita di generalità, possiamo supporre $a = 1$ e studiare il problema nella carta affine $J_0 : \mathbb{K}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ (se avessimo preso $b = 1$, avremmo usato J_1 e se avessimo preso $c = 1$, avremmo usato J_2). Sia $\mathcal{D} = [f]$ la parte affine di \mathcal{C} , per cui $f(x, y) = F(1, x, y)$. Identifichiamo $U_0 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ a \mathbb{K}^2 tramite J_0 , per cui pensiamo P anche come a un punto di \mathbb{K}^2 .

³³ **Attenzione!** non chiediamo $P \in V(\mathcal{C})$.

Abbiamo visto che $m_P(\mathcal{C}) = m_P(\mathcal{D})$, in quanto $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{D}} + kH_0$ (dove H_0 è la retta all'infinito $[x_0]$) e la retta all'infinito non contribuisce a $m_P(\mathcal{C})$, cioè $m_P(\mathcal{C}) = m_P(\overline{\mathcal{D}}) = m_P(\mathcal{D})$.
(Tra poco dimostreremo che per ogni curva affine o proiettiva



$$m_P(\mathcal{C} + \mathcal{C}') = m_P(\mathcal{C}) + m_P(\mathcal{C}')$$

e ciò implica che, se $P \notin H_0$, allora $m_P(\mathcal{C} + kH_0) = m_P(\mathcal{C})$.
Dunque P è singolare per $\mathcal{C} \iff$ lo è per $\mathcal{D} \iff$ ³⁴ $P \in V(\mathcal{D})$ e

$$\nabla f(P) = (0 \ 0) \iff f(P) = 0, f_x(P) = 0, f_y(P) = 0 \iff$$
 ³⁵ $f(b, c) = 0, f_x(b, c) = 0, f_y(b, c) = 0$

Osserviamo ora che

$$f(b, c) = F(1, b, c), \quad f_x(b, c) = F_{x_1}(1, b, c), \quad f_y(b, c) = F_{x_2}(1, b, c)$$

Dunque P è singolare per $\mathcal{C} \iff$

$$\boxed{F(1, b, c) = 0, F_{x_1}(1, b, c) = 0, F_{x_2}(1, b, c) = 0}$$

Grazie all'**Identità di Eulero**, le condizioni appena date sono equivalenti a

$$F_{x_0}(1, b, c) = F_{x_1}(1, b, c) = F_{x_2}(1, b, c) = 0$$

Infatti, se valgono tali condizioni, da $dF = x_0F_{x_0} + x_1F_{x_1} + x_2F_{x_2}$ ³⁶, sostituendo $x_0 = 1, x_1 = b$ e $x_2 = c$, otteniamo

$$\boxed{dF(1, b, c) = F_{x_0}(1, b, c) + bF_{x_1}(1, b, c) + cF_{x_2}(1, b, c)} \quad (***)$$

Dunque, se $F_{x_1}(1, b, c) = F_{x_2}(1, b, c) = 0$, l'annullarsi di $F(1, b, c)$ equivale all'annullarsi di $F_{x_0}(1, b, c)$, come voluto.

② Per quanto visto in precedenza (cioè $I(\mathcal{D}, r, P) = I(\overline{\mathcal{D}}, \bar{r}, P) = I(\mathcal{C}, \bar{r}, P)$), una retta proiettiva è tangente a \mathcal{C} in $P \iff$ è la chiusura proiettiva di una retta tangente a \mathcal{D} in P . Dunque, per quanto visto nel caso affine, se $\nabla F(P) \neq 0$ e $P \in V(\mathcal{C})$, cioè $F(P) = 0$, allora otteniamo, come sopra, che $\nabla f(b, c) \neq 0$ e, dal **Teorema 1.13.1**, l'unica tangente a \mathcal{C} in P è la chiusura proiettiva della retta

$$f_x(b, c) \cdot (x - b) + f_y(b, c) \cdot (y - c) = 0, \text{ cioè la retta}$$

$$F_{x_1}(1, b, c) \cdot (x_1 - bx_0) + F_{x_2}(1, b, c) \cdot (x_2 - cx_0) = 0 \iff$$

$$x_0 \left(\underbrace{-bF_{x_1}(1, b, c) - cF_{x_2}(1, b, c)}_{=F_{x_0}(1, b, c), \text{ per } ***, \text{ visto che } F(1, b, c)=0} \right) + x_1F_{x_1}(1, b, c) + x_2F_{x_2}(1, b, c) = 0 \iff$$

$$x_0F_{x_0}(1, b, c) + x_1F_{x_1}(1, b, c) + x_2F_{x_2}(1, b, c) = 0, \text{ come voluto.}$$

□

Osservazione 26. ∇F non è una ben definita funzione: $\nabla F : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^3$ ³⁷.

Però, se $\deg F = d$, (F omogeneo ovviamente) $\nabla F(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^{d-1} \nabla F(a, b, c)$, dunque $\nabla F(P)$ è ben definito a meno di scalari non nulli, il che per noi è sufficiente.

³⁴Per il **Teorema 1.13.1**.

³⁵Ricordando che $P = [1, b, c]$, per cui, visto in \mathbb{K}^2 , P ha coordinate (b, c) .

³⁶Usiamo anche che $d = \deg F \neq 0$.

³⁷I punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sono terne a meno di scalari.

Riassumendo: se $P \in \mathbb{K}^2$ o $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e $\mathcal{C} = [f]$ o $\mathcal{C} = [F]$, P è singolare per $\mathcal{C} \iff$

$$\begin{aligned} \text{caso affine:} & \quad f(P) = 0 \wedge \nabla f(P) = 0 \\ \text{caso proiettivo:} & \quad \nabla F(P) = 0 \quad (\implies F(P) = 0) \end{aligned}$$

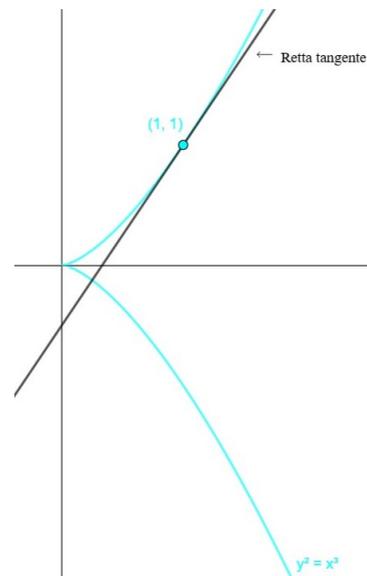
Esempio 16. Sia $\mathcal{C} = [y^2 - x^3]$, la cuspide. Calcoliamo i punti singolari (abbiamo già trovato l'origine).

Se $f(x, y) = y^2 - x^3$, $\nabla f(x, y) = (-3x^2 \quad 2y)$, per cui il gradiente si annulla in $(0 \ 0)$, che, giacendo sulla curva, è l'unico punto singolare di \mathcal{C} .

La tangente a \mathcal{C} nel punto $(1, 1)$ è

$$f_x(1, 1) \cdot (x - 1) + f_y(1, 1) \cdot (y - 1) = 0 \implies -3x + 2y + 1 = 0$$

In $(0, 0)$, tutte le rette sono tangenti, ma c'è una retta "più tangente", cioè quella orizzontale.



Definizione 1.13.1. Dati \mathcal{C} curva affine o proiettiva e $P \in V(\mathcal{C})$ punto, se $I(\mathcal{C}, r, P) > m_P(\mathcal{C})$, allora una retta r (affine o proiettiva) è una **tangente principale** a \mathcal{C} in P .

Nel caso della cuspide, detta $r_0 = \{y = 0\}$, abbiamo che $I(\mathcal{C}, r, O) = 2 \forall r \neq r_0$, r passa per O e $I(\mathcal{C}, r_0, O) = 3$, dunque r_0 è l'unica tangente principale a \mathcal{C} in O .

Se P è un punto liscio di una curva \mathcal{C} , allora $m_P(\mathcal{C}) = 1$, dunque una retta passante per P è una tangente principale $\iff I(\mathcal{C}, r, P) > 1 \iff r$ è tangente.

Nei punti lisci, esiste un'unica tangente principale che è la retta tangente (abbiamo già visto nel **Teorema 1.13.1** e nel **Teorema 1.13.2** che nei punti lisci la tangente è unica).

1.14 Calcolo di tangenti principali con sviluppo di Taylor

Trattiamo il caso affine (nel caso proiettivo ci si riconduce a quello affine usando le carte).

Sia $C = [f]$ una curva affine e sia $O = (0,0)$. Vogliamo studiare O (vedere se è liscio, studiarne le tangenti principali, ecc...). Decomponiamo f nelle sue componenti omogenee:

$$f = f_d + f_{d+1} + f_{d+2} + \dots + f_n, \quad n = \deg f, \quad f_d \neq 0$$

Osserviamo che $O = (0,0) \in V(C) \iff d \geq 1$.

Proposizione 1.14.1. ① $m_O(C) = d$;

② la retta di giacitura $\text{Span}\langle(\alpha, \beta)\rangle$ è tangente principale a C in $O = (0,0) \iff f_d(\alpha, \beta) = 0$;

③ Una retta di equazione $ax + by = 0$ è tangente principale a C in $O = (0,0) \iff ax + by$ è un fattore di f_d ;

④ In $O = (0,0)$, C ha al più $m_O(C)$ tangenti principali.

Dimostrazione. ① Sia r parametrizzata da $t \mapsto (t\alpha, t\beta)$, allora

$$\begin{aligned} f(t\alpha, t\beta) &= f_d(t\alpha, t\beta) + f_{d+1}(t\alpha, t\beta) + \dots + f_n(t\alpha, t\beta) = t^d f_d(\alpha, \beta) + \dots + t^n f_n(\alpha, \beta) = \\ &= t^d (f_d(\alpha, \beta) + t f_{d+1}(\alpha, \beta) + \dots + t^{n-d} f_n(\alpha, \beta)). \end{aligned}$$

Poiché $f_d \neq 0$ (come polinomio) e $|\mathbb{K}| = +\infty$, $\exists(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tale che $f_d(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dunque $\exists r$ retta per l'origine tale che $I(C, r, O) = d$. Inoltre, $t^d \mid f(t\alpha, t\beta) \forall(\alpha, \beta)$, dunque $m_O(C) = d$.

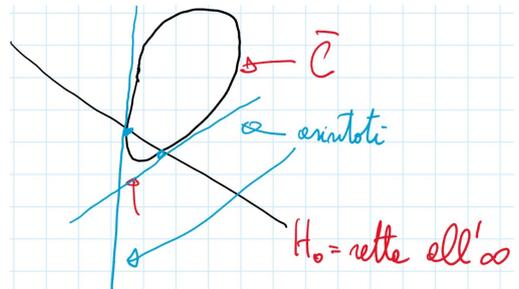
② Inoltre, r di giacitura $\text{Span}\langle(\alpha, \beta)\rangle$ è tangente principale \iff

$$I(C, r, O) > d \iff t^{d+1} \mid f(t\alpha, t\beta) \iff f_d(\alpha, \beta) = 0$$

③ Per ②, $ax + by = 0$ è tangente principale \iff un suo generatore $(-b, a)$ annulla $f_d \iff {}^{38}ax + by \mid f_d$.

Ovviamente ③ \implies ④: se esistessero più di d tangenti principali, f_d sarebbe divisibile per più di d polinomi omogenei di grado 1 coprimi a due a due, dunque sarebbe $\deg f_d > d \zeta$. \square

Definizione 1.14.1. Sia C una curva affine di \mathbb{K}^2 , un **asintoto** di C è una retta affine r la cui chiusura proiettiva \bar{r} sia una tangente principale a \bar{C} in un punto improprio di \bar{C} . (Sono le rette "tangenti alla curva all'infinito".)



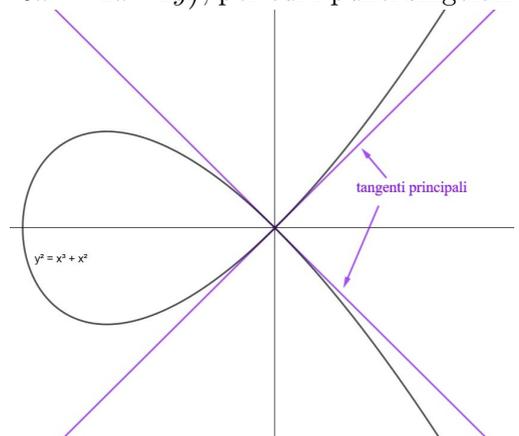
Esempio 17. Calcolare i punti singolari, le tangenti principali nei punti singolari e gli asintoti della curva $y^2 = x^2(x+1)$.

Dimostrazione. Se $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$, allora $\nabla f(x, y) = (-3x^2 - 2x \quad 2y)$, per cui i punti singolari risolvono

$$\begin{cases} x^2(x+1) = y^2 \\ 3x^2 + 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2(x+1) = 0 \\ x(3x+2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dunque l'unico punto singolare è l'origine (se $x \neq 0$, avremmo sia $x+1=0$ che $3x+2=0 \zeta$).

$$f(x, y) = \underbrace{y^2 - x^2}_{\substack{\text{componente} \\ \text{omogenea} \\ \text{di grado 2}}} - \underbrace{x^3}_{\substack{\text{componente} \\ \text{omogenea} \\ \text{di grado 3}}}$$



³⁸Rivedere quanto osservato sulla fattorizzazione dei polinomi omogenei in 2 variabili.

Per quanto già visto, poiché $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$, le tangenti principali in O sono $y = x$ e $y = -x$. L'equazione F di \bar{C} è $x_0^3 \left(\left(\frac{x_2}{x_0} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^3 \right) = x_2^2 x_0 - x_1^2 x_0 - x_1^3$ i cui punti impropri si ottengono imponendo $x_0 = 0$ che dà $x_1 = 0$, dunque l'unico punto improprio è $[0, 0, 1]$. Cerchiamo le sue tangenti principali:

$$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = (x_2^2 - x_1^2 \quad -2x_0 x_1 - 3x_1^2 \quad 2x_0 x_2) \implies \nabla F(0, 0, 1) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

per cui $[0, 0, 1]$ è liscio per la chiusura proiettiva e ha una sola tangente principale (che è la tangente) di equazione $F_{x_0}(0, 0, 1)x_0 + F_{x_1}(0, 0, 1)x_1 + F_{x_2}(0, 0, 1)x_2 = 0$, cioè $x_0 = 0$ che è la retta impropria la quale non è chiusura proiettiva di alcuna retta affine.

In conclusione, \mathcal{C} non ha asintoti. \square

Esercizio 11. Calcolare gli asintoti della curva \mathcal{C} di \mathbb{R}^2 di equazione $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + xy^4 = 0$.

Dimostrazione. La chiusura proiettiva \bar{C} di \mathcal{C} ha equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^3 x_0^2 - x_1 x_2^2 x_0^2 + x_1^2 x_2 x_0^2 - x_2^3 x_0^2 + x_1 x_2^4$$

e i punti impropri di \mathcal{C} si ottengono ponendo $x_0 = 0$, da cui $x_1 x_2^4 = 0$, cioè $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$. I punti impropri sono perciò $[0, 0, 1]$ e $[0, 1, 0]$.

Dobbiamo trovare le tangenti principali di questi punti:

$$\nabla F(0, x_1, x_2) = (0 \quad x_2^4 \quad 4x_1 x_2^3) \implies \nabla F(0, 0, 1) = (0 \quad 1 \quad 0) \text{ e } \nabla F(0, 1, 0) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Dunque $[0, 0, 1]$ è liscio con tangente (principale) $x_1 = 0$, che è chiusura proiettiva di $x = 0$. Perciò la retta affine $x = 0$ è un asintoto di \mathcal{C} .

Purtroppo $[0, 1, 0]$ non è liscio. Dobbiamo perciò trovare le tangenti principali. Studiamo il problema nella carta affine in cui si trova $[0, 1, 0]$, cioè U_1 .

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^3 x_0^2 - x_1 x_2^2 x_0^2 + x_1^2 x_2 x_0^2 - x_2^3 x_0^2 + x_1 x_2^4$$

La curva affine $J_1^{-1}(\bar{C})$ ha equazione $g(u, v) = F(u, 1, v)$, cioè

$$g(u, v) = u^2 - u^2 v^2 + u^2 v - u^2 v^3 + v^4$$

$J_1^{-1}([0, 1, 0]) = (0, 0)$, dunque dobbiamo trovare le tangenti principali a $J_1^{-1}(\bar{C})$ nell'origine.

La componente omogenea di grado minimo di g è $u^2 = u \cdot u$, per cui abbiamo la tangente principale $u = 0$. Questo vuol dire che \bar{C} ha, in $[0, 1, 0]$, la tangente principale $x_0 = 0$ ³⁹.

Questa tangente principale è la retta impropria (rispetto a J_0): tanta fatica per "nulla"!

Il punto singolare $[0, 1, 0]$ non dà luogo ad asintoti, perché la sua tangente principale è proprio la retta impropria. \square

Teorema 1.14.2 (Lemma di Bezout).

Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} curve proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, con $\deg \mathcal{C} = n$ e $\deg \mathcal{D} = m$:

- ① Se $|\mathbb{K}| = +\infty$ e $|V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})| > n \cdot m$, allora \mathcal{C} e \mathcal{D} hanno (almeno) una componente irriducibile in comune;
- ② Se \mathbb{K} è algebricamente chiuso (con $n \geq 1$ e $m \geq 1$), allora $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

In realtà, date due curve \mathcal{C}, \mathcal{D} , esiste una ben definita nozione di molteplicità di intersezione tra \mathcal{C} e \mathcal{D} in P (noi l'abbiamo visto nel caso in cui \mathcal{D} sia una retta) e si ha che, se \mathcal{C} e \mathcal{D} non hanno componenti in comune, allora

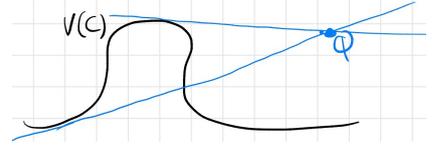
$$\sum_{P \in V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})} I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) \leq n \cdot m, \text{ con l'uguaglianza nel caso in cui } \mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}.$$

³⁹In quanto $u = \frac{x_0}{x_1}$, perciò la chiusura proiettiva di $u = 0$ rispetto alla carta J_1 è la retta proiettiva $x_0 = 0$.

Esempio 18. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e \mathcal{C} è una curva proiettiva liscia (di grado ≥ 1), allora \mathcal{C} è irriducibile.

Dimostrazione. Se $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ fosse riducibile, per **Bezout**, avremmo $V(\mathcal{C}_1) \cap V(\mathcal{C}_2) \neq \emptyset$, per cui, preso $P \in V(\mathcal{C}_1) \cap V(\mathcal{C}_2)$, avremmo che P sarebbe singolare per \mathcal{C} ζ \square

Esercizio 12. Siano \mathcal{C} una curva liscia in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, con $\deg \mathcal{C} = d > 1$ e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, e $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, allora esiste almeno una retta passante per Q e tangente a \mathcal{C} in qualche punto di $V(\mathcal{C})$ e ce ne sono al più $d(d-1)$.



Dimostrazione. Scriviamo cosa vuol dire che $Q \in \tau_P$ per $P \in V(\mathcal{C})$: $Q = [q_0, q_1, q_2]$. Dato $P \in V(\mathcal{C})$, $P = [y_0, y_1, y_2]$, la retta tangente a \mathcal{C} in P ⁴⁰ ha equazione

$$F_{x_0}(y_0, y_1, y_2)x_0 + F_{x_1}(y_0, y_1, y_2)x_1 + F_{x_2}(y_0, y_1, y_2)x_2 = 0$$

Quindi $Q \in \tau_P \iff \sum_{i=0}^2 F_{x_i}(y_0, y_1, y_2)q_i = 0$. Le rette tangenti che stiamo cercando corrispondono

queste sono
le "variabili"

quindi ai punti $P = [y_0, y_1, y_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che soddisfano il sistema $\begin{cases} F(y_0, y_1, y_2) = 0 \\ \sum_{i=0}^2 F_{x_i}(y_0, y_1, y_2)q_i = 0 \end{cases}$.

In altre parole, se chiamiamo \mathcal{D} la curva proiettiva data dal polinomio omogeneo $\left[\sum_{i=0}^2 F_{x_i}(y_0, y_1, y_2)q_i \right]$, stiamo guardando i punti di $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})$ e vogliamo applicare **Bezout**.

Prima controlliamo che il polinomio $\sum_{i=0}^2 F_{x_i}(y_0, y_1, y_2)q_i$ non sia il polinomio nullo, da cui segue che è omogeneo di grado $d-1$.

Supponiamo per assurdo che sia il polinomio nullo e, senza perdita di generalità, supponiamo che $q_0 \neq 0$. Dal fatto che $\sum_{i=0}^2 F_{x_i}(y_0, y_1, y_2)q_i = 0$, ricaviamo $F_{x_0} = \alpha F_{x_1} + \beta F_{x_2}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ora, F_{x_1} e F_{x_2} sono omogenei di grado $d-1$ (> 0) o nulli. In entrambi i casi, per **Bezout**, $V(F_{x_1}) \cap V(F_{x_2}) \neq \emptyset$. Prendiamo $R \in V(F_{x_1}) \cap V(F_{x_2})$.

Abbiamo $F_{x_1}(R) = F_{x_2}(R) = 0$ e anche $F_{x_0}(R) = 0$, vista l'uguaglianza di sopra. Da questo segue che $R \in \text{Sing } \mathcal{C}$ ⁴¹. Per ipotesi però \mathcal{C} è liscia ζ , quindi il polinomio $\sum_{i=0}^2 F_{x_i}(y_0, y_1, y_2)q_i$ non è identicamente nullo ed è omogeneo di grado $d-1$.

Per **Bezout**, se \mathcal{C} e \mathcal{D} non hanno componenti in comune, possiamo concludere che

$$|V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})| \leq \deg \mathcal{C} \cdot \deg \mathcal{D} = d(d-1)$$

\mathcal{C} e \mathcal{D} non hanno componenti in comune, perché \mathcal{C} è irriducibile (visto che è liscia), quindi l'unica componente che potrebbero avere in comune è \mathcal{C} stessa, ma $\deg \mathcal{D} < \deg \mathcal{C}$ ζ \square

⁴⁰Ben definita perché per ipotesi \mathcal{C} è liscia.

⁴¹Luogo dei punti singolari di \mathcal{C} .

Esercizi IV settimana

Esercizio 14. Sia \mathcal{C} la curva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1^2 - x_0 x_1 x_2^2 - 3x_1^4 - x_0^2 x_2^2 - 2x_0 x_1^3 = 0$$

(1) Si mostri che \mathcal{C} ha 4 punti singolari e si osservi che tre di essi sono allineati.

(2) Si dica se \mathcal{C} sia irriducibile.

Dimostrazione. (1) Usiamo il criterio del gradiente:

$$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = \begin{cases} F_{x_0} = 2x_0 x_1^2 - x_1 x_2^2 - 2x_0 x_2^2 - 2x_1^3 \\ F_{x_1} = 2x_0^2 x_1 - x_0 x_2^2 - 12x_1^3 - 6x_0 x_1^2 \\ F_{x_2} = -2x_0 x_1 x_2 - 2x_0^2 x_2 = -2x_0 x_2 (x_1 + x_0) \end{cases}$$

Dalla terza componente del gradiente deduciamo che, se $[x_0, x_1, x_2]$ è singolare, allora

$$x_0 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_1 + x_0 = 0$$

Caso $x_0 = 0$ Sostituendo nelle altre due componenti del gradiente, abbiamo

$$-x_1 x_2^2 - 2x_1^3 = 0 \quad \text{e} \quad -12x_1^3 = 0$$

da cui $x_1 = 0$ è necessario e sufficiente per l'annullarsi di ∇F , perciò otteniamo il punto $[0, 0, 1]$.

Caso $x_2 = 0$ Sostituendo nelle altre due componenti del gradiente, abbiamo

$$2x_0 x_1^2 - 2x_1^3 = 2x_1^2 (x_0 - x_1) = 0 \quad \text{e} \quad 2x_0^2 x_1 - 12x_1^3 - 6x_0 x_1^2 = 0$$

da cui $x_1 = 0 \vee x_0 = x_1$.

Sottocaso $x_1 = 0$ Si annulla anche la terza componente di ∇F , perciò otteniamo il punto $[1, 0, 0]$.

Sottocaso $x_0 = x_1$ La terza componente di ∇F diventa $-16x_0^3 = 0$, da cui $x_0 = 0 \implies x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$, ma non abbiamo nessun punto associato a queste condizioni.

Caso $x_0 + x_1 = 0$ Sostituendo nelle altre due componenti di ∇F , abbiamo

$$-2x_1^3 - x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2^2 - 2x_1^3 = x_1 x_2^2 - 4x_1^3 = x_1 (x_2 - 2x_1)(x_2 + 2x_1) = 0$$

$$\text{e } 2x_1^3 + x_1 x_2^2 - 12x_1^3 + 6x_1^3 = x_1 x_2^2 - 4x_1^3 = x_1 (x_2 - 2x_1)(x_2 + 2x_1) = 0$$

Dunque, se $x_1 = 0$ e $x_0 = -x_1$, allora otteniamo di nuovo $[0, 0, 1]$;

se $x_2 = 2x_1$, allora otteniamo $[-1, 1, 2]$; se $x_2 = -2x_1$, allora otteniamo $[-1, 1, -2]$.

In conclusione, i punti singolari di \mathcal{C} sono $[1, 0, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[-1, 1, 2]$ e $[-1, 1, -2]$.

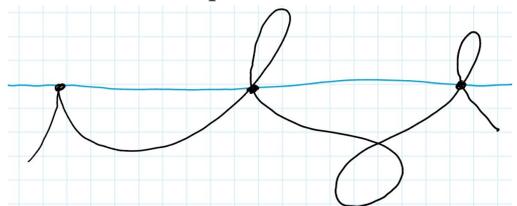
I punti $[0, 0, 1]$, $[-1, 1, 2]$ e $[-1, 1, -2]$ giacciono sulla retta $x_0 + x_1 = 0$ e dunque sono allineati.

(2) Sia r la retta di equazione $x_0 + x_1 = 0$, allora

$$\sum_{P \in \mathcal{V}(\mathcal{C}) \cap r} I(\mathcal{C}, r, P) \geq 2 + 2 + 2 = 6 > \deg \mathcal{C}$$

in quanto, se P è un punto singolare e r passa per P , allora, per definizione di punto singolare, $I(\mathcal{C}, r, P) \geq 2$.

Dunque r è una componente irriducibile di $\mathcal{C} \implies \mathcal{C}$ è riducibile. \square



Esercizio 16. Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ curve proiettive e sia $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si mostri che

$$m_P(\mathcal{C} + \mathcal{C}') = m_P(\mathcal{C}) + m_P(\mathcal{C}')$$

Dimostrazione. Scegliamo le coordinate in modo che $P = [1, 0, 0]$ e studiamo le parti affini \mathcal{D} e \mathcal{D}' di \mathcal{C} e \mathcal{C}' (ricordiamo che $m_P(\mathcal{C}) = m_P(\mathcal{D})$, $m_P(\mathcal{C}') = m_P(\mathcal{D}')$ e $m_P(\mathcal{C} + \mathcal{C}') = m_P(\mathcal{D} + \mathcal{D}')$, dove indichiamo con P anche $(0, 0) = J_0^{-1}([1, 0, 0]) = J_0^{-1}(P)$ e osserviamo che effettivamente $\mathcal{D} + \mathcal{D}'$ è la parte affine di $\mathcal{C} + \mathcal{C}'$). Abbiamo visto che, se f e g sono i polinomi che definiscono \mathcal{D} e \mathcal{D}' con decomposizioni in componenti omogenee $f = f_d + f_{d+1} + \dots + f_n$, con $f_d \neq 0$, e $g = g_{d'} + g_{d'+1} + \dots + g_{n'}$, con $g_{d'} \neq 0$, allora $m_P(\mathcal{D}) = d$ e $m_P(\mathcal{D}') = d'$.

Ora, $m_P(\mathcal{C} + \mathcal{C}') = m_P(\mathcal{D} + \mathcal{D}') =$ ⁴² grado della componente omogenea di grado minimo di $f \cdot g = d + d' = m_P(\mathcal{C}) + m_P(\mathcal{C}')$, in quanto $f \cdot g = f_d \cdot g_{d'} +$ termini di grado superiore. \square

Nel caso in cui si studi un punto $P = (x_0, y_0)$ diverso da $(0, 0)$ in una curva affine \mathcal{C} di equazione $f(x, y) = 0$, dobbiamo riscrivere f come somma di monomi in $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$ e procedere come sopra, cioè porre $f = f_d + f_{d+1} + \dots + f_n$, con $f_k = \sum_{i=0}^k a_i (x - x_0)^i (y - y_0)^{k-i}$, per ottenere $m_P(\mathcal{C}) = d$.

Corollario 1.14.3. Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ curve proiettive e $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, allora P è singolare per $\mathcal{C} + \mathcal{C}' \iff P$ è singolare per \mathcal{C} , P è singolare per \mathcal{C}' oppure $P \in V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{C}')$.

Dimostrazione. $m_P(\mathcal{C} + \mathcal{C}') = m_P(\mathcal{C}) + m_P(\mathcal{C}') \geq 2 \iff$ almeno uno tra $m_P(\mathcal{C})$ e $m_P(\mathcal{C}')$ è ≥ 2 (cioè P è singolare per \mathcal{C} o per \mathcal{C}') oppure $m_P(\mathcal{C}) \geq 1$ e $m_P(\mathcal{C}') \geq 1$, cioè $P \in V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{C}')$. \square

Esercizio 17. Sia \mathcal{C} una conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si mostri che i seguenti fatti sono equivalenti:

- (1) \mathcal{C} è degenere;
- (2) \mathcal{C} è singolare;
- (3) \mathcal{C} è riducibile.

Dimostrazione. $((3) \implies (2))$ Vero in generale per curve su $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$. Se \mathcal{C} è riducibile, allora $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, con $\deg \mathcal{C}_1, \deg \mathcal{C}_2 > 0$. Per **Bezout**, abbiamo $V(\mathcal{C}_1) \cap V(\mathcal{C}_2) \neq \emptyset$ e, se $P \in V(\mathcal{C}_1) \cap V(\mathcal{C}_2)$, allora $P \in V(\mathcal{C})$ ed è un punto singolare per \mathcal{C} , perché $m_P(\mathcal{C}) = m_P(\mathcal{C}_1) + m_P(\mathcal{C}_2) \geq 2$.

$((1) \iff (2))$ Calcoliamo ∇F , dove F è un'equazione di \mathcal{C} . Data $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{C})$ che rappresenta \mathcal{C} ,

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j = a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} x_0 x_1 + 2a_{02} x_0 x_2 + 2a_{12} x_1 x_2$$

$$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 & a_{01} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & a_{02} x_0 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \nabla F(x_0, x_1, x_2) = 2A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema $\nabla F = 0$ ha soluzione $\neq (0 \ 0 \ 0) \iff \det A = 0 \iff \mathcal{C}$ è degenere (ricordiamo che nel proiettivo le soluzioni $\neq (0 \ 0 \ 0)$ di $\nabla F = 0$ sono automaticamente punti di $V(\mathcal{C})$, grazie all'**Identità di Eulero**).

$((2) \implies (3))$ Supponiamo che $P \in V(\mathcal{C})$ sia un punto singolare. Scegliamo un $Q \in V(\mathcal{C}) \setminus \{P\}$ ⁴³ e consideriamo la retta $\ell = L(P, Q)$. Visto che P è singolare per \mathcal{C} , abbiamo $I(\mathcal{C}, \ell, P) \geq m_P(\mathcal{C}) \geq 2$ e $I(\mathcal{C}, \ell, Q) \geq 1$, da cui

$$\sum_{P' \in V(\mathcal{C}) \cap \ell} I(\mathcal{C}, \ell, P') \geq I(\mathcal{C}, \ell, P) + I(\mathcal{C}, \ell, Q) \geq 3 > \deg \mathcal{C}$$

perciò ℓ deve essere componente di $\mathcal{C} \implies \mathcal{C}$ è riducibile. \square

⁴²Per quanto già visto.

⁴³Esiste perché, se $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$, allora $V(\mathcal{C})$ è infinito.

E se \mathbb{K} non è algebricamente chiuso come, ad esempio, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

$(3) \implies (2)$ è ancora vero, perché due rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ hanno sicuramente intersezione non vuota.

$(1) \iff (2)$ è pure ancora vero (infatti nella dimostrazione non serve $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$).

$(2) \implies (3)$ invece non è più vero: ad esempio la conica $F = x_0^2 + x_1^2 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha supporto $\{[0, 0, 1]\}$ e questo è un punto singolare perché $\nabla F = (2x_0 \ 2x_1 \ 0)$ e $\nabla F(0, 0, 1) = (0 \ 0 \ 0)$. Tuttavia F su \mathbb{R} non è riducibile.

Avvertenza: quando $\mathbb{K} \neq \overline{\mathbb{K}}$, in **Geometria algebrica** una curva si considera liscia qualora non abbia punti singolari in $\overline{\mathbb{K}}$.

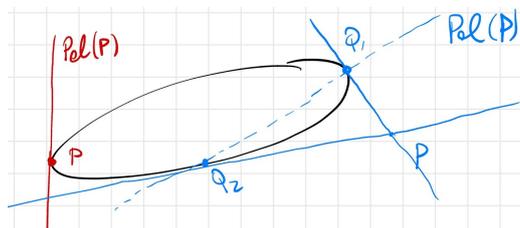
Esempio 19. • Date due coniche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $V(\mathcal{C}_1) \cap V(\mathcal{C}_2) = \emptyset$, la loro somma $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ non ha punti singolari reali, però, se guardiamo i punti complessi, è singolare (in quanto riducibile);

- L'esempio di prima, $x_0^2 + x_1^2 = 0$, è irriducibile su \mathbb{R} ma non su \mathbb{C} : $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$, cioè la conica è unione di due rette complesse che si intersecano nel punto $[0, 0, 1]$.

Esercizio 18. Sia \mathcal{C} una conica non degenera di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avente equazione ${}^tAx = 0$, dove A è una

matrice simmetrica 3×3 a coefficienti in \mathbb{C} e $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Per ogni $P = [v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, indichiamo con $\text{pol}(P)$ la retta di equazione ${}^tvAx = 0$. Inoltre, per ogni $Q \in V(\mathcal{C})$ indichiamo con τ_Q la tangente a \mathcal{C} in Q .



(1) Si mostri che, se $P \in V(\mathcal{C})$, allora $\text{pol}(P) = \tau_P$.

(2) Si mostri che, se $P \notin V(\mathcal{C})$, allora $\text{pol}(P) \cap V(\mathcal{C}) = \{Q \in V(\mathcal{C}) \mid P \in \tau_Q\}$.

Dimostrazione. (2) (Senza supporre che $P \notin V(\mathcal{C})$.) Dato $Q \in V(\mathcal{C})$, calcoliamo l'equazione di τ_Q : nell'**Esercizio 17** abbiamo visto che (detta F l'equazione della conica) $\nabla F(\bar{x}) = 2A\bar{x}$.

L'equazione della tangente a \mathcal{C} in $Q = [\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2] \in V(\mathcal{C})$ è ${}^t\nabla F(\bar{x})x = 0$, quindi ⁴⁴

$$P = [v] \in \tau_Q \iff {}^t\bar{x}Av = 0 \iff {}^t({}^t\bar{x}Av) = 0 \iff {}^tv{}^tA\bar{x} = 0 \iff {}^tvA\bar{x} = 0 \iff Q \in \underbrace{\text{pol}(P)}_{\substack{\text{ha equaz.} \\ {}^tvAx=0}}$$

(1) Supponiamo che $P \in V(\mathcal{C})$. Sappiamo che $\text{pol}(P) \cap V(\mathcal{C}) = \{Q \in V(\mathcal{C}) \mid P \in \tau_Q\}$. Visto che $P \in \tau_P$, abbiamo che $P \in \text{pol}(P) \cap V(\mathcal{C})$. Adesso verificheremo che sia l'unico punto di quell'insieme e, una volta fatto questo, avremo concluso, poiché $\text{pol}(P) \cap V(\mathcal{C})$ consisterà di un punto solo e perciò $\text{pol}(P)$ sarà tangente a \mathcal{C} in P , cioè $\text{pol}(P) = \tau_P$.

Se, per assurdo, $\exists Q \neq P$ tale che $Q \in V(\mathcal{C})$ e $P \in \tau_Q$, allora la retta τ_Q avrebbe $I(\mathcal{C}, \tau_Q, Q) \geq 2$ e $I(\mathcal{C}, \tau_Q, P) \geq 1 \implies \tau_Q$ sarebbe componente di \mathcal{C} \nmid perché \mathcal{C} è non degenera e per l'**Esercizio 17**. \square

⁴⁴ ${}^t\nabla F(\bar{x})x = {}^t(2A\bar{x})x = 2{}^t\bar{x}{}^tAx \stackrel{{}^tA=A}{=} 2{}^t\bar{x}Ax$.

Esercizi V settimana

Esercizio 19. Sia \mathcal{C} una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

(1) Si mostri che, se \mathcal{C} è irriducibile, allora ha un numero finito di punti singolari.

(2) Si mostri che \mathcal{C} è ridotta se e solo se ha un numero finito di punti singolari.

Dimostrazione. (1) Sia $\mathcal{C} = [F]$, dunque $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è singolare per $\mathcal{C} \iff F(P) = 0$ e $\nabla F(P) = 0$ (in realtà $\nabla F(P) = 0 \implies F(P) = 0$).

Quindi P è singolare $\iff F(P) = 0$, $F_{x_0}(P) = 0$, $F_{x_1}(P) = 0$ e $F_{x_2}(P) = 0$.

Poiché $0 \neq F = \frac{x_0 F_{x_0} + x_1 F_{x_1} + x_2 F_{x_2}}{d}$, almeno uno tra F_{x_0} , F_{x_1} e F_{x_2} non è il polinomio nullo. Supponiamo si tratti di F_{x_0} , perciò, se P è singolare, allora $P \in V(\mathcal{C}) \cap V([F_{x_0}])$.

Notiamo che $\deg F_{x_0} < \deg F$ e F è irriducibile per ipotesi, dunque F_{x_0} ed F non possono avere fattori comuni, perciò, per **Bezout**, $|V(\mathcal{C}) \cap V([F_{x_0}])| \leq \deg \mathcal{C} \cdot \underbrace{(\deg \mathcal{C} - 1)}_{\deg F_{x_0}}$.

(2) (\Leftarrow) Se \mathcal{C} non è ridotta, allora $\exists \mathcal{D}$ componente multipla di \mathcal{C} , cioè $\mathcal{C} = k\mathcal{D} + \mathcal{D}'$, con $k \geq 2$, ma quindi $\forall P \in V(\mathcal{D})$ $m_P(\mathcal{C}) = k \cdot m_P(\mathcal{D}) + m_P(\mathcal{D}') \geq k \cdot 1 + 0 \geq k \geq 2$, dunque P è singolare per \mathcal{C} . La tesi segue dal fatto che il supporto di una curva proiettiva (di grado positivo) in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sia infinito ⁴⁵.

(\Rightarrow) Se \mathcal{C} è ridotta, allora $\mathcal{C} = \mathcal{D}_1 + \dots + \mathcal{D}_k$, con $\mathcal{D}_i \neq \mathcal{D}_j$ per $i \neq j$ e \mathcal{D}_i irriducibile $\forall i$.

$\forall P \in V(\mathcal{C})$ $m_P(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^k m_P(\mathcal{D}_i)$ che è ≥ 2 quando $\exists i, j$, con $i \neq j$, tali che $m_P(\mathcal{D}_i) \geq 1$ e $m_P(\mathcal{D}_j) \geq 1$ oppure $\exists l$ tale che $m_P(\mathcal{D}_l) \geq 2$, cioè se e solo se $P \in V(\mathcal{D}_i) \cap V(\mathcal{D}_j)$ per qualche $i \neq j$ oppure P è singolare per qualche \mathcal{D}_l (scriviamo $P \in \text{Sing } \mathcal{D}_l$), cioè

$$P \text{ è singolare per } \mathcal{C} \iff P \in \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, k}} (V(\mathcal{D}_i) \cap V(\mathcal{D}_j)) \cup \bigcup_{i=1}^k \text{Sing } \mathcal{D}_i$$

dove $\bigcup_{\substack{i \neq j \\ i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, k}} (V(\mathcal{D}_i) \cap V(\mathcal{D}_j))$ è finito per **Bezout**, visto che $\mathcal{D}_i \neq \mathcal{D}_j$, $\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j$ sono irriducibili e

$\bigcup_{i=1}^k \text{Sing } \mathcal{D}_i$ è finita per il punto (1).

La tesi segue dal fatto che un'unione finita di insiemi finiti sia finita. □

⁴⁵Già visto (**Esercizio 10**), usando che \mathbb{C} sia algebricamente chiuso.

TOPOLOGIA GENERALE

2.1 Spazi metrici e topologici

Definizione 2.1.1. Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) , dove X è un insieme e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una *distanza*, cioè è tale che:

1. $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \forall x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Esempio 1. In $X = \mathbb{R}^n$, $d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ è detta *distanza Euclidea*.

Esempio 2. In $X = \mathbb{R}^n$, con $p \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$, $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. In particolare:

- $p = 1$, $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- $p = 2$, **Esempio 1**;
- “ $p = \infty$ ”, $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$.

Esempio 3. In $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$, con $p \in \mathbb{R}$ e $p > 1$,

$$d_p(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ è detta } \mathbf{distanza } L^p$$

Esempio 4. Definiamo la *distanza discreta* su un X qualsiasi come $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$.

È una distanza: (1.) e (2.) sono immediate e per (3.), $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$: l'unico “rischio” è che $d(x, z) = 1$ e $d(x, y) = d(x, z) = 0$, ma questo non accade perché $d(x, y) = d(y, z) = 0 \implies x = y$ e $y = z \implies x = z \implies d(x, z) = 0$.

Definizione 2.1.2. Dati (X, d) e (Y, d') spazi metrici, un *embedding isometrico* è una funzione $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ tale che $d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in X$. Se f è bigettiva, allora si dice *isometria*.

Osservazione 27. • Se f è un embedding isometrico, allora f è iniettivo, infatti se $f(x) = f(y)$, allora $0 = d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \implies x = y$.

- Se un embedding isometrico è bigettivo, allora $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è automaticamente un embedding isometrico (e quindi un'isometria), perché, leggendo "al contrario" $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, otteniamo che $d'(z, w) = d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \forall z, w \in Y$.
- Composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico e l'identità è un embedding isometrico.
- Segue che $\text{Isom}(X, d) = \{f : (X, d) \rightarrow (X, d) \mid f \text{ è isometria}\} (= \text{Isom } X)$ è un gruppo rispetto alla composizione.

Esempio 5. • $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_E)$ distanza Euclidea,

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_E) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b, \text{ dove } A \in \mathcal{O}(n) \text{ e } b \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n \rtimes \mathcal{O}(n)$$

- Se d è la distanza discreta su X (cioè $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$), allora

$$\text{Isom}(X, d) = \{f : X \rightarrow X \text{ bigezione}\}$$

Ogni isometria è una bigezione e, data una bigezione $f : X \rightarrow X$, dobbiamo controllare che $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$: in effetti $d(f(x), f(y)) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) = f(y) \\ 1 & \text{se } f(x) \neq f(y) \end{cases}$ quindi, visto che f è una bigezione, $x = y \iff f(x) = f(y)$.

Questa nozione di funzione è troppo "rigida" per quello che vogliamo fare.

Per esempio (X, d) e $(X, 2d)$ non sono isometrici ma per certi versi "dovrebbero essere considerati lo stesso spazio".

Definizione 2.1.3. Dato (X, d) uno spazio metrico, la **palla aperta** di centro $x_0 \in X$ e raggio $R > 0$ è $B(x_0, R) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < R\}$.

Definizione 2.1.4. Una **funzione continua in** $x_0 \in X$ è una funzione $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (cioè $x \in B(x_0, \delta) \implies f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, ossia $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$). Una tale f si dice **continua** se è continua in $x_0 \forall x_0 \in X$.

Esempio 6. • Gli embedding isometrici sono funzioni continue: dato ε , possiamo prendere $\delta = \varepsilon$.

- Se d è la metrica discreta su X , chi sono le funzioni continue $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$?

Nella metrica discreta, $B(x_0, R) = \begin{cases} X & \text{se } R > 1 \\ \{x_0\} & \text{se } R \leq 1 \end{cases}$ quindi, per soddisfare la continuità, basta prendere $\delta = \frac{1}{2}$.

Definizione 2.1.5. Dato (X, d) uno spazio metrico, un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice **aperto** se $\forall x_0 \in A \exists \delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq A$.

Proposizione 2.1.1. $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ è continua $\iff \forall A \subseteq Y$ aperto $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto.

Lemma 2.1.2. Le palle aperte sono sottoinsiemi aperti.

Dimostrazione. (**Lemma 2.1.2**) Sia $B(x_0, R)$ una palla aperta.

Vogliamo verificare che, dato $y \in B(x_0, R)$, $\exists \delta > 0$ tale che $B(y, \delta) \subseteq B(x_0, R)$.

Prendiamo $\delta = R - d(y, x_0)$. Controlliamo che $B(y, \delta) \subseteq B(x_0, R)$: se $z \in B(y, \delta)$, allora $d(y, z) < \delta$, quindi $d(z, x_0) \leq d(z, y) + d(y, x_0) < \delta + d(y, x_0) = R - \cancel{d(y, x_0)} + \cancel{d(y, x_0)}$. \square

¹Notare che in questo caso si ha $B(x_0, R) = B(x_0, R')$ con $R \neq R'$!

Dimostrazione. (**Proposizione 2.1.1**) (\implies) Supponiamo che f sia continua e dimostriamo che se $A \subseteq Y$ è aperto, allora $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto. Dobbiamo vedere che $\forall x_0 \in f^{-1}(A) \exists \delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$. Visto che A è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq A$. Per continuità di f , $\exists \delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq A$. Segue che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$.

(\impliedby) Supponiamo che $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto $\forall A \subseteq Y$ aperto. Sia $x_0 \in X$ e verifichiamo che f sia continua in x_0 . Fissato $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare $\delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.

Ora, $B(f(x_0), \varepsilon)$ è un aperto per il **Lemma 2.1.2**, quindi, per ipotesi, $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ è aperto in X . Dunque, visto che $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, $\exists \delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Segue che $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$. \square

Quindi la continuità dipende soltanto dagli aperti degli spazi metrici coinvolti.

Proposizione 2.1.3. Sia $\tau_d = \{A \subseteq X \mid A \text{ è } \underbrace{d\text{-aperto}}_{\text{aperto per la distanza } d}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, valgono:

1. $X, \emptyset \in \tau_d$;
2. se $A_1, A_2 \in \tau_d$, allora $A_1 \cap A_2 \in \tau_d$;
3. se $A_i \in \tau_d$, con $i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_d$.

Dimostrazione. (1.) Ovvio che X sia aperto, ma anche che \emptyset lo sia (perché l'ipotesi $x \in \emptyset$ è falsa, dunque la proposizione a cui appartiene è vera);

(2.) se A_1, A_2 sono aperti e $x_0 \in A_1 \cap A_2$, allora $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tali che $B(x_0, \delta_1) \subseteq A_1$ e $B(x_0, \delta_2) \subseteq A_2$, quindi $B(x_0, \min\{\delta_1, \delta_2\}) \subseteq A_1 \cap A_2$;

(3.) se A_i , con $i \in I$, sono aperti e $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ e preso i_0 tale che $x_0 \in A_{i_0}$, A_{i_0} è aperto, quindi $\exists \delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, quindi $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto. \square

Osservazione 28. Non è vero in generale che, se A_i , con $i \in I$, sono aperti, allora $\bigcap_{i \in I} A_i$ è aperto: ad esempio $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$, sono aperti, ma $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ non lo è.

Definizione 2.1.6. Uno **spazio topologico** è una coppia (X, τ) , dove X è un insieme e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, detta **topologia**, è tale che

1. $X, \emptyset \in \tau$;
2. se $A_1, A_2 \in \tau$, allora $A_1 \cap A_2 \in \tau$;
3. se $A_i \in \tau$, con $i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Gli $A \in \tau$ si dicono **aperti** e i $C \subseteq X$ tali che $X \setminus C \in \tau$ si dicono **chiusi**.

Osservazione 29. • Da 2. segue induttivamente che se $A_1, \dots, A_k \in \tau$, allora $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \tau$.

• Per i chiusi valgono le proprietà "complementari", cioè:

- 1.' X, \emptyset sono chiusi;
- 2.' se C_1, C_2 sono chiusi, allora $C_1 \cup C_2$ è chiuso (e segue anche per unioni finite);
- 3.' se $C_i \subseteq X$, con $i \in I$, sono chiusi, allora $\bigcap_{i \in I} C_i$ è chiuso.

e una topologia si può specificare anche dando i chiusi (che soddisfano 1.', 2.' e 3.');

- “Gli insiemi non sono porte” (J. Munkres), cioè tipicamente esistono sottoinsiemi di X che non sono né aperti né chiusi ².

Esempio 7. Se (X, d) è uno spazio metrico, (X, τ_d) è uno spazio topologico, dove τ_d è la **topologia indotta** dalla distanza d .

Definizione 2.1.7. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **metrizzabile** se $\exists d$ distanza su X tale che $\tau = \tau_d$ (vedremo che esistono topologie non metrizzabili).

Definizione 2.1.8. Due distanze d, d' su X si dicono **topologicamente equivalenti** se $\tau_d = \tau_{d'}$.

Vediamo che, su \mathbb{R}^n , $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $d_E(x, y)$ e $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$ sono distanze topologicamente equivalenti ³.

Lemma 2.1.4. Date due distanze d, d' su X , se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che $d \leq \alpha d'$ e $d' \leq \beta d$ (cioè $\forall x, y \in X$ $d(x, y) \leq \alpha d'(x, y)$ e $d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$), allora d e d' sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $A \subseteq X$ d -aperto e vogliamo vedere che è anche d' -aperto. Sia $x_0 \in A$: sappiamo che $\exists \delta > 0$ tale che $B^d(x_0, \delta) \subseteq A$, ora prendiamo $B^{d'}(x_0, \frac{\delta}{\alpha})$. Vediamo che $B^{d'}(x_0, \frac{\delta}{\alpha}) \subseteq B^d(x_0, \delta)$. Se $y \in B^{d'}(x_0, \frac{\delta}{\alpha})$, allora $d'(x_0, y) < \frac{\delta}{\alpha}$ e quindi $d(x_0, y) \leq \alpha d'(x_0, y) < \delta \implies y \in B^d(x_0, \delta)$. Questo mostra che A è d' -aperto. Facendo il discorso simmetrico, concludiamo che $\tau_d = \tau_{d'}$. \square

Proposizione 2.1.5. d_1, d_E, d_∞ su \mathbb{R}^n sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. La disuguaglianza **media aritmetica-media quadratica (AM-QM)**

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}{n}}$$

che segue, ad esempio, dalla convessità di $f(x) = x^2$, mostra che $\frac{d_1(x, y)}{n} \leq \frac{d_E(x, y)}{\sqrt{n}}$, cioè

$$d_1(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_E(x, y)$$

$$d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{n \cdot d_\infty(x, y)^2} = \sqrt{n} \cdot d_\infty(x, y)$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\} \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = d_1(x, y)$$

Dunque, per il **Lemma 2.1.4**, si ha la tesi. \square

Esempio 8 (Topologia discreta). La **Topologia discreta** su un insieme X è $\tau_{disc} = \mathcal{P}(X)$.

Osservazione 30. τ_{disc} è metrizzabile e coincide con la topologia indotta dalla distanza discreta d : abbiamo visto che per τ_d , $B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$, quindi i singoletti sono aperti, perciò qualsiasi $Y \subseteq X$ è aperto, in quanto $Y = \bigcup_{y \in Y} \{y\}$ è unione di aperti.

Esempio 9 (Topologia indiscreta). La **Topologia indiscreta** su un insieme X è $\tau_{indisc} = \{\emptyset, X\}$.

Definizione 2.1.9. Siano $(X, \tau), (Y, \tau')$ due spazi topologici, una **funzione continua** è una funzione $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ tale che $\forall A \in \tau', f^{-1}(A) \in \tau$.

Un **omeomorfismo** è una funzione continua $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bigettiva e con inversa continua.

²Ad esempio $[0, 1]$ in \mathbb{R} dotato della topologia Euclidea.

³In realtà, tutte le distanze provenienti da una norma su uno spazio vettoriale di dimensione finita sono topologicamente equivalenti.

Esempio 10. Dato un insieme X , con $|X| \geq 2$, $\text{Id} : (X, \tau_{disc}) \longrightarrow (X, \tau_{indisc})$ è continua, è bigettiva ($\text{Id}^{-1} = \text{Id}$), ma l'inversa $\text{Id} : (X, \tau_{indisc}) \longrightarrow (X, \tau_{disc})$ non è continua: se $x \in X$, allora $\{x\}$ è aperto per τ_{disc} , ma non per τ_{indisc} .

Proposizione 2.1.6. Sia (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile, allora τ è indotta (anche) da una metrica d limitata, addirittura tale che $d(x, y) \leq 1 \forall x, y \in X$.

(La proprietà "essere limitato", per uno spazio metrico, non è topologica, cioè uno spazio metrico limitato può essere omeomorfo a uno spazio metrico illimitato.)

Dimostrazione. Poiché τ è metrizzabile, è indotta da una distanza d' . Poniamo $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $d(x, y) = \min\{d'(x, y), 1\}$. d è effettivamente una distanza:

1. $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ è ovvio e se $d(x, y) = 0 \implies \min\{d'(x, y), 1\} = 0 \implies d'(x, y) = 0 \implies x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ discende direttamente dalla simmetria di d' ;
3. Dati $x, y, z \in X$, dimostriamo che $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$:
 - se $d(x, z) = 1$ oppure $d(z, y) = 1$: $d(x, y) \leq 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$;
 - altrimenti, $d(x, z) < 1$ e $d(z, y) < 1$, per cui $d(x, z) = d'(x, z)$ e $d(z, y) = d'(z, y)$, dunque: $d(x, y) = \min\{d'(x, y), 1\} \leq d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Ora dobbiamo dimostrare che d e d' inducono la stessa topologia.

Osserviamo che, se $R < \frac{1}{2}$, allora $B_d(x, R) = B_{d'}(x, R) \forall x \in X$. Ora, siano τ la topologia indotta da d' e τ_d la topologia indotta da d .

A è aperto per $\tau \iff \forall x \in A \exists R > 0$ tale che $B_{d'}(x, R) \subseteq A \iff \forall x \in A \exists R \in (0, \frac{1}{2})$ tale che $B_{d'}(x, R) \subseteq A \iff \forall x \in A \exists R \in (0, \frac{1}{2})$ tale che $B_d(x, R) \subseteq A \iff A$ è aperto per τ_d . Dunque $\tau = \tau_d$. \square

Osservazione 31. Avevamo già visto che, se esistono due distanze d_1 e d_2 su X tali che $d_1 \leq k \cdot d_2$ e $d_2 \leq k' \cdot d_1$ per qualche $k, k' \in \mathbb{R}$, allora d_1 e d_2 inducono la stessa topologia (in tal caso d_1 e d_2 si dicono **bilipschitz equivalenti**). La **Proposizione 2.1.6** ci dice però che ci sono distanze topologicamente equivalenti (cioè che inducono la stessa topologia) ma non bilipschitz equivalenti: basta prendere $X = \mathbb{R}$, $d_1(x, y) = |x - y|$ e $d_2(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$.

Esempio 11 (Topologia cofinita). La **Topologia cofinita** su un insieme X è

$$\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \text{ tali che } |X \setminus A| < +\infty\}$$

In maniera equivalente, possiamo definire τ_{cof} dicendo che i suoi chiusi sono X e i relativi sottoinsiemi finiti. Vediamo che τ_{cof} è una topologia, verificando gli assiomi sui chiusi:

Dimostrazione. 1.' \emptyset, X sono chiusi: infatti, X lo è per definizione e \emptyset è finito;

2.' Se C_1, C_2 sono chiusi, allora $|C_1| < +\infty$ o $C_1 = X$ e $|C_2| < +\infty$ o $C_2 = X$, perciò $|C_1 \cup C_2| < +\infty$ o $C_1 \cup C_2 = X$, per cui $C_1 \cup C_2$ è chiuso;

3.' Se C_i , con $i \in I$, è chiuso $\forall i \in I$, allora

– se $C_i = X \forall i \in I$, allora $\bigcap_{i \in I} C_i = X$, che è chiuso;

– se $\exists i_0$ tale che $C_{i_0} \neq X$, allora, per definizione di chiuso, $|C_{i_0}| < +\infty$, per cui $\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq C_{i_0}$

e $\left| \bigcap_{i \in I} C_i \right| \leq |C_{i_0}| < +\infty$, dunque $\bigcap_{i \in I} C_i$ è finito ed è quindi chiuso.

\square

⁴Poiché per raggi $< \frac{1}{2}$ le palle di d e di d' coincidono.

Esempio 12 (Topologia di Zariski). Siano $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un insieme di polinomi in n variabili su \mathbb{K} e $V(I) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall f \in I\}$. Diciamo che i $V(I)$, al variare di I tra i sottoinsiemi di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, descrivono la famiglia di chiusi di una topologia τ_Z su \mathbb{K}^n , detta **Topologia di Zariski**.

Dimostrazione. ① $\emptyset \in \tau_Z$, perché $\emptyset = V(I)$, $I = \{x_1, x_1 - 1\}$, $\mathbb{K}^n \in \tau_Z$, perché $\mathbb{K}^n = V(\{0\})$;

② L'unione di due chiusi è chiusa, perché $V(I) \cup V(J) = V(I \cdot J)$, dove $I \cdot J = \{f \cdot g \mid f \in I, g \in J\}$ (per **Esercizio**);

③ L'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è chiusa: dati $I_\alpha \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, con $\alpha \in \Omega$,
 $\bigcap_{\alpha \in \Omega} V(I_\alpha) = V\left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} I_\alpha\right)$ che è un chiuso per definizione. □

Ad esempio, la **Topologia di Zariski** su $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ coincide con la **Topologia cofinita**⁵.

In due variabili, esempi di chiusi di Zariski sono i supporti di curve affini, ma anche i sottoinsiemi finiti: se $F = \{P_1, \dots, P_k\} \subseteq \mathbb{K}^2$, con $P_i = (\alpha_i, \beta_i)$, e $I = \{f_1 \cdot \dots \cdot f_k \mid f_i = x - \alpha_i \text{ o } f_i = y - \beta_i\}$, dove $|I| = 2^k$ (abbiamo 2^k scelte possibili per le funzioni), allora $F = V(I)$.

⁵Perché un polinomio non nullo in una variabile ha solo un numero finito di zeri, per cui un chiuso di Zariski è o tutto \mathbb{K} o un insieme finito; viceversa, dato un insieme finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{K}$, si ha $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = V(I)$, con $I = \{f\}$, e $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)$.

2.2 Chiusura e parte interna

Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Z \subseteq X$.

Definizione 2.2.1. La *chiusura* di Z è il più piccolo chiuso di X che contiene Z e si indica con \bar{Z} .

Questa definizione è ben posta: in effetti $\bar{Z} = \bigcap_{\substack{Z \subseteq C \subseteq X \\ C \text{ chiuso}}} C$. Basta vedere che questo insieme (a

destra dell'uguale) sia effettivamente il più piccolo chiuso che contiene Z .

Poiché X è chiuso, la famiglia dei chiusi di X che contengono Z è non vuota.

Per definizione, $Z \subseteq \bigcap_{\substack{Z \subseteq C \subseteq X \\ C \text{ chiuso}}} C$ e inoltre, poiché l'intersezione di chiusi è chiusa, a destra dell'uguale

abbiamo effettivamente un chiuso che contiene Z . È il più piccolo, perché, per costruzione, se $Z \subseteq C'$ e C' è chiuso, allora $\bigcap_{\substack{Z \subseteq C \subseteq X \\ C \text{ chiuso}}} C \subseteq C'$, perché C' compare tra i C che stiamo intersecando.

Definizione 2.2.2. La *parte interna* di Z è il più grande aperto contenuto in Z e si indica con $\overset{\circ}{Z}$ o con $\text{int}(Z)$.

Osservazione 32. Come per la chiusura, bisogna verificare che un tale aperto esista. Si può fare in due modi:

① osservare che l'unione di tutti gli aperti contenuti in Z è un aperto (per gli assiomi di topologia) ed è perciò uguale a $\overset{\circ}{Z}$;

② osservare che A è un aperto contenuto in $Z \iff X \setminus A$ è un chiuso che contiene $X \setminus Z$. Dunque l'aperto più grande contenuto in Z è il complementare del chiuso più piccolo che contiene $X \setminus Z$.

In particolare, è ben definito e $\text{int}(Z) = X \setminus \overline{(X \setminus Z)}$.

Definizione 2.2.3. La *frontiera topologica* (*frontiera* o *bordo*) di Z è $\partial Z := \bar{Z} \setminus \overset{\circ}{Z}$.

Esempio 13. Se $X = \mathbb{R}$ e $Z = \mathbb{Q}$, allora $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, in quanto \mathbb{Q} non contiene alcuna palla di raggio positivo, dunque non contiene alcun aperto non vuoto. Anche $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non contiene aperti non vuoti, dunque $\text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$. Abbiamo visto sopra che $X = \text{int}(Z) \sqcup \overline{(X \setminus Z)} \forall Z \subseteq X$.

Posto $X = \mathbb{R}$ e $Z = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, abbiamo

$$\mathbb{R} = \text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \sqcup \overline{(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))} = \emptyset \sqcup \bar{\mathbb{Q}} \implies \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Definizione 2.2.4. Siano X topologico, $Z \subseteq X$ e $P \in X$, allora P si dice:

1. *aderente* a Z se $P \in \bar{Z}$;
2. *di accumulazione* per Z se $P \in \overline{Z \setminus \{P\}}$.

Segue banalmente dalle definizioni che, se $Z \subseteq Y$, allora $\bar{Z} \subseteq \bar{Y}$ e $\overset{\circ}{Z} \subseteq \overset{\circ}{Y}$, dunque un punto di accumulazione è anche un punto aderente.

Punti aderenti e di accumulazione di Z possono appartenere a Z ma anche non appartenervi.

Esempio 14. Se $X = \mathbb{R}$ e $Z = [0, 1) \cup \{2\}$, allora $\bar{Z} = [0, 1] \cup \{2\}$, perciò 2 è aderente a Z , ma non è di accumulazione per Z , in quanto $2 \notin \overline{Z \setminus \{2\}} = \overline{[0, 1)} = [0, 1]$.

Invece 1 è di accumulazione per Z e lo è anche $\frac{1}{2}$, in quanto $\frac{1}{2} \in \overline{Z \setminus \{\frac{1}{2}\}}$.

Proposizione 2.2.1. P è un punto aderente a $Z \subseteq X \iff \forall A$ aperto tale che $P \in A$ si ha $A \cap Z \neq \emptyset$.

Dimostrazione. (\implies) Se $P \notin \bar{Z}$, allora $\exists A = X \setminus \bar{Z}$ aperto tale che $P \in A$ e $A \cap Z = \emptyset$ (in quanto per costruzione $A \cap \bar{Z} = \emptyset$, da cui a maggior ragione $A \cap Z = \emptyset$).

(\impliedby) Se $\exists A$ aperto tale che $P \in A$ e $A \cap Z = \emptyset$, allora $X \setminus A$ è un chiuso che contiene Z , per cui, per definizione di chiusura, $\bar{Z} \subseteq X \setminus A$, ma $P \in A$, dunque $P \notin \bar{Z}$. \square

2.3 Topologie più o meno fini

Definizione 2.3.1. Date τ, τ' topologie su un insieme X , se $\tau' \subseteq \tau$, cioè se ogni aperto di τ' è aperto anche di τ ($\tau, \tau' \subseteq \mathcal{P}(X)$), allora τ si dice **più fine** di τ' , ossia $\tau > \tau'$.

L'essere più fine è una relazione d'ordine (parziale) sull'insieme delle topologie su X (ovvio). La topologia meno fine su X è sempre la topologia indiscreta $\tau_{indisc} = \{\emptyset, X\}$ mentre la più fine è sempre la topologia discreta $\tau_{disc} = \mathcal{P}(X)$.

Osservazione 33. $\tau' > \tau \iff \text{Id} : (X, \tau') \longrightarrow (X, \tau)$ è continua.

In questo caso, la continuità di Id dice che τ' “distingue maggiormente” i punti rispetto a τ : visti in τ , i punti non sono “più lontani tra loro” che se visti in τ' . Di qui l'uso del termine “fine”.

Su X possono esistere topologie non comparabili (cioè l'ordine per finezza non è totale): ad esempio, su $X = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ e $\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ sono topologie (pensateci) ma non sono comparabili.

Esempio 15. Se d, d' sono distanze su X ed $\exists k > 0$ tale che $d \leq k \cdot d'$, allora la topologia indotta da d è meno fine di quella indotta da d' .

Questo fatto è già stato dimostrato quando abbiamo visto che, se vale anche che $\exists k' > 0$ tale che $d' \leq k' \cdot d$, allora d e d' sono topologicamente equivalenti.

Esempio 16. Su \mathbb{R} , l'usuale topologia Euclidea è più fine (strettamente) della topologia cofinita: tutti i chiusi della cofinita sono anche chiusi euclidei, da cui la tesi.

Esempio 17. Se $X = C^0([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$, allora $d_1, d_\infty : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \quad e \quad d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

sono distanze (facili verifiche). Inoltre, se τ_1, τ_∞ sono le rispettive topologie indotte, allora $\tau_1 < \tau_\infty$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\tau_1 < \tau_\infty$: $\forall f, g \in X$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \int_0^1 d_\infty(f, g) dt = d_\infty(f, g)$$

dunque, intanto, $\tau_1 \leq \tau_\infty$. Per vedere che lo è strettamente, dobbiamo trovare un aperto di τ_∞ che non sia aperto per τ_1 . Prendiamo ad esempio

$$A = B_{d_\infty}(0, 1) = \left\{ f \in X : \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - 0| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| < 1 \right\}^7$$

Diciamo che A non è aperto in τ_1 . Se lo fosse, poiché $0 \in A$, dovrebbe $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B_{d_1}(0, \varepsilon) \subseteq A$. Possiamo anche

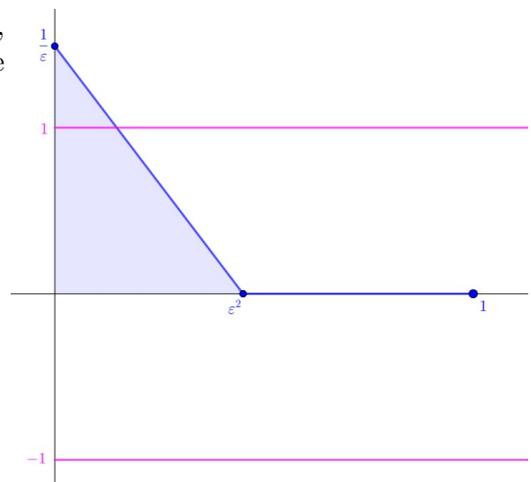
supporre $\varepsilon < 1$. Se $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3}t & t \in [0, \varepsilon^2] \\ 0 & t \in [\varepsilon^2, 1] \end{cases}$, allora

$$d_1(0, f_\varepsilon) = \int_0^1 |f_\varepsilon(t)| dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Dunque $f_\varepsilon \in B_{d_1}(0, \varepsilon)$, ma $|f_\varepsilon(0)| = \frac{1}{\varepsilon} > 1$, perciò

$$f_\varepsilon \notin B_{d_\infty}(0, 1) = A$$

che dà la contraddizione cercata.



□

⁶Per il **Teorema di Weierstrass**.

⁷Abbiamo visto che le palle aperte sono aperti.

2.4 Basi e prebasi

Siano X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Vorremmo definire la topologia “generata da S ”, cioè la topologia più piccola (i.e. meno fine) che contenga S . Tale topologia esiste grazie al seguente

Lemma 2.4.1. *Siano τ_i , con $i \in I$, topologie su X , allora $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ è una topologia su X .*

Dimostrazione. ① $\emptyset \in \tau_i$ e $X \in \tau_i \forall i \in I \implies \emptyset \in \tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ e $X \in \tau$;

② $A \in \tau, B \in \tau \implies A \in \tau_i, B \in \tau_i \forall i \in I \implies^8 A \cap B \in \tau_i \forall i \in I \implies A \cap B \in \tau$;

③ Siano $A_\alpha \in \tau$, con $\alpha \in \Lambda$, allora $A_\alpha \in \tau_i \forall \alpha \in \Lambda$ e $\forall i \in I$. Fissando i e poiché τ_i è una topologia $\forall i \in I$, otteniamo $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau_i \forall i \in I$, da cui $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \bigcap_{i \in I} \tau_i = \tau$. □

Dunque possiamo definire la topologia generata da S come $\tau_S = \bigcap_{\substack{\tau \text{ topologia} \\ \tau \supseteq S}} \tau$. Poiché almeno la

topologia discreta contiene S , si tratta di un’intersezione su una famiglia non vuota.

Per il **Lemma 2.4.1**, τ_S è effettivamente una topologia. Per costruzione, $S \subseteq \tau_S$ e, sempre per costruzione, è la più piccola con questa proprietà.

Vedremo tra poco che, in effetti, S è (quasi sempre) una prebase di τ_S . Però, prima di definire la nozione di prebase, introduciamo quella di base.

Definizione 2.4.1. *Dato uno spazio topologico (X, τ) , una **base** di τ è un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che $\forall A \in \tau \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.*

Esempio 18. *Siano (X, d) uno spazio metrico e τ la topologia indotta da d . Se $\Omega \subseteq (0, +\infty)$ è tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists R \in \Omega$ per cui $0 < R < \varepsilon$ ⁹, allora $\mathcal{B} = \{B(x, R) \mid x \in X, R \in \Omega\}$ è una base di τ .*

Infatti, sappiamo che $\mathcal{B} \subseteq \tau$ ¹⁰. Inoltre, se $A \in \tau$, allora, per definizione, $\forall x \in A \exists \varepsilon_x > 0$ tale che $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$. Preso $R_x \in \Omega$ tale che $0 < R_x < \varepsilon_x$, si ha $B(x, R_x) \subseteq B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$, ma allora $A = \bigcup_{x \in A} B(x, R_x)$ (entrambe le inclusioni sono ovvie: $x \in B(x, R_x) \forall x \in A$).

(La **Definizione 2.4.1** equivale a: $A \subseteq X$ è aperto per $\tau \iff \forall x \in A \exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq A$.)

Proposizione 2.4.2. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è base di una qualche topologia \iff valgono:

① $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

② $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

Osservazione 34. *Se \mathcal{B} è base di una qualche topologia τ , necessariamente questa ha come aperti le unioni arbitrarie di elementi di \mathcal{B} .*

Dimostrazione. (\implies) ① Segue dal fatto che $X \in \tau$ per qualsiasi topologia τ .

② Segue dal fatto che $B_1 \cap B_2 \in \tau$ e dalla definizione di base.

(\impliedby) Supponendo che valgano ① e ②, definiamo $\tau = \{A \subseteq X \mid \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \text{ tale che } A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\}$.

Dobbiamo verificare che τ è una topologia (poi è chiaro che \mathcal{B} sia una base):

- $\emptyset \in \tau$ (unione vuota) e $X \in \tau$ (per l’ipotesi ①);
- se $A_i \in \tau$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$: è chiaro perché le unioni distribuiscono sull’unione;

⁸Poiché τ_i verifica gli assiomi $\forall i \in I$.

⁹Ad esempio $\Omega = (0, +\infty)$ o $\Omega = (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$.

¹⁰Le palle aperte sono aperti.

- se $A_1, A_2 \in \tau$, allora $A_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$ e $A_2 = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B'$:

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \right) \cap \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B' \right) = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ B' \in \mathcal{B}_2}} (B \cap B')$$

e, per l'ipotesi ②, abbiamo che $B \cap B' \in \tau$ (quindi anche l'unione). □

In generale, non sarà vero che la topologia generata da $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ abbia S come base.

Definizione 2.4.2. Una **prebase** di una topologia τ su X è $\mathcal{U} \subseteq \tau$ tale che la famiglia delle intersezioni finite di elementi di \mathcal{U} è una base per τ : $\mathcal{B} = \{U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k} \mid U_{i_j} \in \mathcal{U} \text{ e } k \in \mathbb{N}\}$.

Ci sono prebasi che non sono basi, ad esempio: $\mathcal{U} = \{(-\infty, a), (b, +\infty) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, le intersezioni a due a due sono semirette aperte e, se $b < a$, intervalli aperti (b, a) ottenendo una base per la topologia Euclidea. \mathcal{U} però non è una base, perché (b, a) non si può scrivere come unione di elementi di \mathcal{U} .

Teorema 2.4.3. Siano X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. τ è la topologia generata da $S \iff S \cup \{X\}$ è una prebase di τ .

Osservazione 35. Il **Teorema 2.4.3** descrive la topologia generata da S : $A \subseteq X$ è aperto se e solo se è unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$.

Dimostrazione. (\implies) Sia τ la topologia generata da S , vediamo che $S \cup \{X\}$ ne è una prebase. $S \subseteq \tau$ e $X \in \tau$ (per gli assiomi) $\implies S \cup \{X\} \subseteq \tau$. Sia $\mathcal{B} = \{\text{intersezioni finite di elementi di } S \cup \{X\}\}$.

Controlliamo che \mathcal{B} sia una base di una qualche topologia usando la **Proposizione 2.4.2**:

① $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ è vero perché $X \in \mathcal{B}$;

② se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, cioè sono intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$, allora $B_1 \cap B_2$ è pure un'intersezione finita di elementi di $S \cup \{X\}$.

Sia τ' la topologia di cui \mathcal{B} è base ¹¹, visto che $S \cup \{X\} \subseteq \tau$ e per gli assiomi di topologia, segue che $\mathcal{B} \subseteq \tau$ e anche $\tau' \subseteq \tau$.

Ricordiamo che τ è la più piccola topologia che contiene S (per definizione), quindi, visto che $S \subseteq \tau'$, necessariamente abbiamo $\tau' = \tau$.

(\impliedby) Supponiamo che $S \cup \{X\}$ sia prebase di τ ¹². Sia τ' la topologia generata da S . Visto che $S \subseteq \tau$ e τ è una topologia, abbiamo che $\tau' \subseteq \tau$ (per definizione di topologia generata). D'altra parte $S \subseteq \tau'$ e, per gli assiomi di topologia, segue che $\tau \subseteq \tau'$, quindi $\tau' = \tau$. □

Proposizione 2.4.4. Per una funzione tra spazi topologici $f : X \longrightarrow Y$ sono equivalenti:

① f è continua;

② $\exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ base di Y tale che $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \subseteq X$ è aperto;

③ $\exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ prebase di Y tale che $\forall U \in \mathcal{U} \ f^{-1}(U) \subseteq X$ è aperto.

Dimostrazione. (① \implies ②) e (① \implies ③) valgono perché $\mathcal{B} \subseteq \tau$ e $\mathcal{U} \subseteq \tau$.

(② \implies ③) vale perché una base di τ ne è anche una prebase (per **Esercizio**).

(③ \implies ①) segue direttamente dalla descrizione della topologia τ in termini della prebase, infatti, se $U_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{U}$, allora $f^{-1}(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}) = f^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-1}(U_{i_k})$, quindi è aperto in X e inoltre, se B_i , con $i \in I$, sono intersezioni finite di elementi di \mathcal{U} , allora $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ è pure aperto in X . Visto che ogni elemento di τ è di questa forma, f è continua. □

¹¹Gli aperti sono unioni arbitrarie di elementi di \mathcal{B} .

¹²Quindi gli elementi di τ sono unioni arbitrarie di intersezioni finite di $S \cup \{X\}$.

Definizione 2.4.3. Uno spazio topologico si dice **II-numerabile** (oppure si dice **che soddisfa il secondo assioma di numerabilità**) se ammette una base di cardinalità al più numerabile.

Definizione 2.4.4. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ di uno spazio topologico si dice **denso** se $\bar{Y} = X$. X si dice **separabile** se ha un sottoinsieme (al più) numerabile denso.

Esempio 19. \mathbb{R}^n è separabile, perché $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ è denso.

Osservazione 36. $Y \subseteq X$ è denso $\iff \forall A \subseteq X$ aperto non vuoto si ha $Y \cap A \neq \emptyset$.

(Segue dalla caratterizzazione di \bar{Y} come $\bar{Y} = \{x \in X \mid A \cap Y \neq \emptyset \ \forall A \ni x \text{ aperto}\}$.)

Teorema 2.4.5. Uno spazio metrico X è II-numerabile \iff è separabile.

Dimostrazione. (\implies) Vale in generale, anche senza supporre che X sia metrico: se $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base al più numerabile, $\forall n \in \mathbb{N}$ scegliamo arbitrariamente $x_n \in B_n$ (possiamo supporre $B_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$). Diciamo che $Y = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è denso in X , infatti, se $A \subseteq X$ è aperto non vuoto, allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $B_n \subseteq A$ e quindi $x_n \in B_n \subseteq A$ e $x_n \in A \cap Y \neq \emptyset$.

(\impliedby) Sia $Y \subseteq X$ il nostro sottoinsieme numerabile denso. Sia $\mathcal{B} = \{B(y, R) \mid y \in Y, R \in \mathbb{Q}_{>0}\}$. Questo è un insieme al più numerabile, in quanto unione numerabile di insiemi numerabili. Dobbiamo vedere che è una base di X : ci basta vedere che, preso $A \subseteq X$ aperto e $x \in A$, $\exists y \in Y$ e $R \in \mathbb{Q}_{>0}$ tale che $x \in B(y, R) \subseteq A$. Visto che A è aperto in X , $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Prendiamo $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{3})$ (prendere ε come raggio potrebbe non bastare) e un razionale $\frac{\varepsilon}{3} < R < \frac{\varepsilon}{2}$.

Diciamo che $x \in B(y, R) \subseteq A$, infatti $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{3} < R \implies x \in B(y, R)$ e, se $z \in B(y, R)$, allora $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < R + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Quindi $z \in B(x, \varepsilon) \subseteq A$. \square

Corollario 2.4.6. \mathbb{R}^n è II-numerabile ($\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ è denso).

Esempio 20 (Retta di Sorgenfrey). $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

① \mathcal{B} è una base di una topologia su \mathbb{R} . Usiamo il criterio che abbiamo visto:

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{R}$, in quanto ad esempio $[k, k+1)$, con $k \in \mathbb{Z}$, stanno in \mathcal{B} e l'unione è \mathbb{R} ;
2. se $B_1 = [a, b)$ e $B_2 = [c, d)$ sono di \mathcal{B} , allora $B_1 \cap B_2$ è unione di elementi di \mathcal{B} .

$$\text{Questo è vero perché } B_1 \cap B_2 = \begin{cases} [a, b) \\ [c, d) \\ [a, d) \\ [c, b) \\ \emptyset \end{cases} \text{ a seconda della posizione dei due intervalli.}$$

Quindi $B_1 \cap B_2$ è unione di (≤ 1) elementi di \mathcal{B} .

- ② Questa topologia è strettamente più fine della topologia Euclidea. Basta vedere che (a, b) sono aperti di Sorgenfrey¹³ e inoltre $[0, 1)$ non è un aperto Euclideo.
- ③ La topologia di Sorgenfrey è separabile¹⁴.
- ④ Non è a base numerabile. Se \mathcal{B}' è una qualsiasi base, allora $\forall x \in \mathbb{R}$ abbiamo $B_x \in \mathcal{B}'$ tale che $\inf B_x = x$. Questo mostrerà che $\#\mathcal{B}' \geq \#\mathbb{R}$, infatti per $x \in \mathbb{R}$ fissato, $[x, x+1)$ è aperto, quindi dobbiamo avere $[x, x+1) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}''} B$ per $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}'$. Visto che $x \in [x, x+1)$, $\exists B \in \mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}'$ tale che $x \in B$ e $B \subseteq [x, x+1)$, quindi $\inf B = \min B = x$.
- ⑤ Non è metrizzabile. Se lo fosse, per il **Teorema 2.4.5**, dovrebbe essere II-numerabile.

¹³Infatti $(a, b) = \bigcup_{a < x \leq b} [x, b)$.

¹⁴ \mathbb{Q} è denso.

Esercizi VI settimana

Esercizio 23. Su \mathbb{R}^2 , si considerino la topologia Euclidea τ_E e la topologia di Zariski τ_Z .

(1) Si mostri che τ_E è più fine di τ_Z .

(2) Si mostri che τ_E è strettamente più fine di τ_Z .

Dimostrazione. (1) È sufficiente far vedere che ogni chiuso di Zariski sia anche chiuso Euclideo. Se $I = \{f\}$, allora $V(I) = f^{-1}(\{0\})$, in cui f la vediamo come una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Questa f è continua usando la topologia Euclidea e $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ è un chiuso $\implies f^{-1}(\{0\}) = V(I)$ è un chiuso Euclideo.

Per I generico, $V(I)$ è chiuso Euclideo in quanto $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$ è intersezione di chiusi.

(2) Ad esempio, possiamo considerare $A = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ che è un aperto Euclideo: verifichiamo che non sia aperto di Zariski. Più precisamente, vediamo che $\mathbb{R}^2 \setminus A$ non sia chiuso di Zariski.

Se lo fosse, allora potremmo scrivere $\mathbb{R}^2 \setminus A = V(I)$ per qualche $I \subseteq \mathbb{R}[x, y]$. Vediamo che, se $f \in I$, allora f deve essere il polinomio nullo, usando che si debba annullare in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus A$:

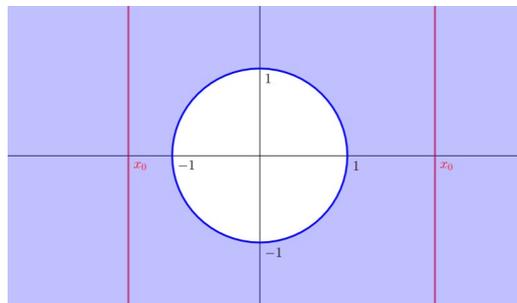
scriviamo $f(x, y) = \sum_{i=0}^d g_i(x)y^i$, dove $g_i \in \mathbb{R}[x]$.

Visto che $f(x, y)$ si annulla su $\mathbb{R}^2 \setminus A$, per $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

il polinomio $f(x_0, y) = \sum_{i=0}^d g_i(x_0)y^i$ ha infinite radici, quindi

deve essere il polinomio nullo $\implies g_i(x_0) = 0 \forall i = 0, \dots, d$ e $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

Visto che i $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ hanno infinite radici, sono nulli e dunque f è il polinomio nullo: questo dà l'assurdo. □



Abbiamo sostanzialmente fatto vedere che la chiusura di Zariski di $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è \mathbb{R}^2 .

Esercizio 24. Siano τ_E e τ_{cof} rispettivamente la topologia Euclidea e la topologia cofinita su \mathbb{R} e sia $f : (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_E)$ una funzione continua. Si dimostri che f è costante.

Osservazione 37. Le funzioni costanti $f : X \rightarrow Y$ sono sempre continue, perché, se $A \subseteq Y$, allora $f^{-1}(A)$ può essere solo \emptyset , nel caso che $A \not\ni \text{Imm } f = \{y_0\}$, oppure X , nel caso che $y_0 \in A$.

Dimostrazione. Supponiamo che la f del testo non sia costante, dunque $\exists x, x' \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) \neq f(x')$ in \mathbb{R} . Prendiamo $\varepsilon < \frac{|f(x) - f(x')|}{2}$ e, di conseguenza, $A = B(f(x), \varepsilon)$

e $A' = B(f(x'), \varepsilon)$ che sono aperti Euclidei tali che $A \cap A' = \emptyset$.

$f^{-1}(A) \ni x$ e $f^{-1}(A') \ni x'$ sono aperti cofiniti e $\neq \emptyset$.

il complementare è
finito o tutto lo spazio
non può essere



Quindi abbiamo che $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') \subseteq \mathbb{R}$ ha pure complementare finito, perciò, in particolare, non vuoto e questo contraddice $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A \cap A') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Dunque le uniche funzioni continue come nel testo sono costanti. □

2.5 Intorni

Definizione 2.5.1. Un **intorno** di $x_0 \in X$ è un sottoinsieme $U \subseteq X$ tale che $\exists A \subseteq X$ aperto tale che $x_0 \in A \subseteq U$.

Osservazione 38. Un intorno di x_0 non è necessariamente un aperto di X .
Ad esempio, $[0, 1)$ in (\mathbb{R}, τ_E) è un intorno di $x_0 = \frac{1}{2}$, ma non di $x_0 = 0$ e non è aperto.

Notazione: $I(x_0) := \{U \subseteq X \mid U \text{ è intorno di } x_0\}$.

Osservazione 39. • $U \in I(x_0) \iff x_0 \in \overset{\circ}{U}$;

• se $U \in I(x_0)$ e $U \subseteq V$, allora $V \in I(x_0)$;

• se $U, V \in I(x_0)$, allora $U \cap V \in I(x_0)$ ¹⁵.

Proposizione 2.5.1. 1. $A \subseteq X$ è aperto \iff è intorno di ogni suo punto.

2. Se $Z \subseteq X$, allora $\overline{Z} = \{x \in X \mid U \cap Z \neq \emptyset \forall U \in I(x)\}$.

Dimostrazione. (1.) (\implies) Nella definizione di intorno, possiamo prendere A stesso.

(\impliedby) Se A è intorno di ogni suo punto, $\forall x \in A \exists A_x \subseteq X$ aperto tale che $x \in A_x \subseteq A$, ma allora $A = \bigcup_{x \in A} A_x$ è unione di aperti e quindi è aperto.

(2.) Partiamo da $\overline{Z} = \{x \in X \mid \forall A \subseteq X \text{ aperto tale che } x \in A, \text{ si ha } A \cap Z \neq \emptyset\}$. Basta osservare che $\forall A \subseteq X$ aperto tale che $x \in A$, si ha $A \cap Z \neq \emptyset \iff \forall U \in I(x)$ si ha $U \cap Z \neq \emptyset$:

(\impliedby) È ovvia, perché A aperto tale che $x \in A \implies A \in I(x)$.

(\implies) Se $U \in I(x)$, allora $\exists A$ aperto tale che $x \in A \subseteq U$ e $A \cap Z \neq \emptyset \implies U \cap Z \neq \emptyset$. □

Osservazione 40. $Z \subseteq X$ è chiuso \iff se $x \in X$ tale che $\forall U \in I(x) U \cap Z \neq \emptyset$, allora $x \in Z$.

Definizione 2.5.2. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua in** $x_0 \in X$ se $\forall U \in I(f(x_0))$

$$\underbrace{\exists V \in I(x_0) \text{ tale che } \underbrace{f(V) \subseteq U}_{V \subseteq f^{-1}(U)}}_{f^{-1}(U) \in I(x_0)}$$

Proposizione 2.5.2. $f : X \rightarrow Y$ è continua \iff è continua in $x_0 \forall x_0 \in X$.

Dimostrazione. (\impliedby) Se $A \subseteq Y$ è un aperto, vogliamo vedere che $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto.

Per quanto visto prima, A è intorno di ogni suo punto. Visto che f è continua in ogni $x_0 \in X$ (quindi, in particolare, per $x_0 \in f^{-1}(A)$), abbiamo che $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto. Sempre per quanto già visto, segue che $f^{-1}(A)$ è aperto.

(\implies) Fissiamo $x_0 \in X$ e mostriamo che f è continua in x_0 .

Prendiamo $U \in I(f(x_0))$ e vediamo che $f^{-1}(U) \in I(x_0)$. Infatti, $U \in I(f(x_0)) \implies f(x_0) \in \overset{\circ}{U} \subseteq U$ e $x_0 \in f^{-1}(\overset{\circ}{U}) \subseteq f^{-1}(U)$. $\overset{\circ}{U}$ aperto + f continua $\implies f^{-1}(\overset{\circ}{U})$ è aperto e segue che $f^{-1}(U) \in I(x_0)$. □

Definizione 2.5.3. Un **sistema fondamentale di intorni (S.F.I.)** di $x_0 \in X$ è $J \subseteq I(x_0)$ tale che $\forall U \in I(x_0) \exists V \in J$ tale che $V \subseteq U$.

Esempio 21. • $J = I(x_0)$ è un S.F.I. di x_0 .

• Se (X, d) è metrico, allora gli insiemi $J = \{B(x_0, R) \mid R \in \mathbb{R}_{>0}\}$, $J' = \{B(x_0, R) \mid R \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ e $J'' = \{B(x_0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ sono tutti S.F.I. per $x_0 \in X$.

Definizione 2.5.4. Uno spazio X si dice **I-numerabile** (oppure si dice che soddisfa il primo assioma di numerabilità) se ogni $x_0 \in X$ ammette un S.F.I. al più numerabile ¹⁶.

¹⁵Se $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$ sono aperti tali che $x_0 \in A$ e $x_0 \in B$, allora $A \cap B \subseteq U \cap V$ è aperto e $x_0 \in A \cap B$.

¹⁶I S.F.I. sono un concetto "locale" di base.

Esempio 22. Tutti gli spazi metrici sono I -numerabili (usare J' o J'' nell'**Esempio 21**). Quindi,

Corollario 2.5.3. Se X non è I -numerabile, allora non è metrizzabile.

Esercizio 13. Sia X più che numerabile e dotiamolo della **Topologia conumerabile** (i cui chiusi sono i sottoinsiemi numerabili di X e tutto X).

Controllare che questa sia effettivamente una topologia e che non sia I -numerabile.

Proposizione 2.5.4. Se X è II -numerabile, allora è anche I -numerabile.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile di X .

Dato $x_0 \in X$, poniamo $\mathcal{B}(x_0) = \{B_n \in \mathcal{B} \mid x_0 \in B_n\}$: questo è un S.F.I. di x_0 ed è al più numerabile. Infatti, B_n sono aperti, quindi $x_0 \in B_n \implies B_n \in I(x_0)$ e, se $U \in I(x_0)$, allora $\exists A \subseteq X$ aperto tale che $x_0 \in A \subseteq U$. Ora, per definizione di base, $A = \bigcup_{i \in I} B_i$, per qualche $I \subseteq \mathbb{N}$, quindi $\exists i \in \mathbb{N}$ tale che $x_0 \in B_i$ e $B_i \subseteq A \subseteq U$. \square

Osservazione 41. Il viceversa è falso: infatti, ad esempio, se X è un insieme più che numerabile con la topologia discreta, allora, poiché è metrizzabile, è I -numerabile, ma non è II -numerabile, visto che (per **Esercizio**) una qualsiasi base della topologia discreta deve contenere tutti i singoletti che sono $\#X$ ¹⁷.

Correzione di una cosa detta a voce dal professore e, comunque, utile riflessione per noi:

Riguardo la Topologia di Zariski su \mathbb{R}^2 , non è vero che qualsiasi sottoinsieme infinito di \mathbb{R}^2 sia Zariski-denso, ad esempio, l'asse x , $Z = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, è infinito, ma è Zariski-chiuso (l'equazione è $y = 0$) e non è Zariski-denso.

Ancora: si può dimostrare (per **Esercizio**) che Z è la chiusura di Zariski di $Z' = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ci sono però sottoinsiemi numerabili di \mathbb{R}^2 la cui chiusura di Zariski è tutto \mathbb{R}^2 , ad esempio, si può dimostrare che la chiusura di Zariski di $Z'' = \{(n, 2^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è tutto \mathbb{R}^2 (idea: se $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ è tale che $f(n, 2^n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, allora $f = 0$).

In effetti, $W \subseteq \mathbb{R}^2$ è Zariski-denso $\iff (f \in \mathbb{R}[x, y] \text{ tale che } f(x, y) = 0 \forall (x, y) \in W \implies f = 0)$.

¹⁷ $\#X > \#\mathbb{N}$.

2.6 Successioni e limiti in spazi topologici

Definizione 2.6.1. Una *successione* in uno spazio topologico X è una funzione $\mathbb{N} \rightarrow X$. La denotiamo con “ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ” o, più brevemente, con “ $\{x_n\} \subseteq X$ ”. Diciamo che la successione x_n *converge* a $x \in X$ e scriviamo $x_n \rightarrow x$, se $\forall U \in I(x)$ si ha che $x_n \in U$ definitivamente¹⁸.

Osservazione 42. In generale i limiti possono non esistere e/o non essere unici.

Proposizione 2.6.1. Se X è I-numerabile, allora $C \subseteq X$ chiuso $\iff \forall \{x_n\} \subseteq X$ successione tale che $x_n \in C$ frequentemente¹⁹ e $x_n \rightarrow x$, si ha $x \in C$.

Dimostrazione. (\implies) Vale sempre, senza l'ipotesi I-numerabile. Usiamo il fatto che se $Z \subseteq X$, allora $\bar{Z} = \{x \in X \mid U \cap Z \neq \emptyset \forall U \in I(x)\}$. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione tale che $x_n \rightarrow x$ e $x_n \in C$ frequentemente. Dobbiamo vedere che $x \in C = \bar{C}$. Usiamo la caratterizzazione di \bar{C} : dato $U \in I(x)$, per definizione di limite, visto che $x_n \rightarrow x$, avremo $x_n \in U$ definitivamente e, dato che $x_n \in C$ frequentemente, segue che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} \in U \cap C \implies U \cap C \neq \emptyset$.

(\impliedby) Basta controllare che $\bar{C} \subseteq C$ (infatti vale sempre che $C \subseteq \bar{C}$).

Sia $x \in \bar{C}$: vogliamo costruire una successione $x_n \in C$ che converga a x , cosicché l'ipotesi implichi $x \in C$ e ciò dimostri l'inclusione $\bar{C} \subseteq C$.

Sia $J = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un S.F.I. di x al più numerabile. Possiamo supporre che $U_{n+1} \subseteq U_n \forall n \in \mathbb{N}$ (se questo non è vero, sostituiamo $\{U_n\}$ con $\{U'_n\}$ dato da $U'_n = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n \forall n \in \mathbb{N}$. Questo è ancora un S.F.I. di x : dato $U \in I(x) \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \subseteq U$, quindi $U'_n \subseteq U_n \subseteq U$).

Costruiamo $\{x_n\} \subseteq X$ scegliendo arbitrariamente $x_n \in U_n \cap C \neq \emptyset$ perché $x \in \bar{C}$ e $U_n \in I(x)$. Si ha $x_n \rightarrow x$: infatti, se $U \in I(x)$, allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \subseteq U$ e, se $k \geq n$, $U_k \subseteq U_n$, quindi $x_k \in U_k \subseteq U_n \subseteq U \forall k \geq n$, cioè $x_n \in U$ definitivamente. \square

Osservazione 43. In generale, senza l'ipotesi di I-numerabilità, la freccia (\impliedby) non vale.

Definizione 2.6.2. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ che soddisfa

$$(\{x_n\} \subseteq X, x_n \in C \text{ frequentemente}, x_n \rightarrow x) \implies x \in C$$

si dice *sequenzialmente chiuso* (o *chiuso per successioni*).

(Terminologia analoga per aperti e continuità.)

Proposizione 2.6.2. Se X è I-numerabile, allora $A \subseteq X$ è aperto $\iff \forall \{x_n\} \subseteq X, x_n \rightarrow x$ e $x \in A$, si ha $x_n \in A$ definitivamente.

Dimostrazione. (\implies) Sempre vera: se A è aperto, allora è intorno di ogni suo punto. Se $x_n \rightarrow x$ e $x \in A$, allora, per definizione di limite e poiché $A \in I(x)$, segue che $x_n \in A$ definitivamente.

(\impliedby) Usiamo la **Proposizione 2.6.1** (si potrebbe dimostrare anche senza: per **Esercizio**): $A \subseteq X$ è aperto $\iff X \setminus A \subseteq X$ è chiuso $\iff \forall \{x_n\} \subseteq X, x_n \rightarrow x, x_n \in X \setminus A$ frequentemente $\implies x \in X \setminus A$.

Equivalentemente, $x \in A \implies x_n \in A$ definitivamente.

(Abbiamo usato $A \rightarrow B$ equivale a $\neg B \rightarrow \neg A$ e che $\neg(P(n) \text{ è vera frequentemente})$ equivale a $\neg P(n)$ è vera definitivamente.) \square

Proposizione 2.6.3. Se X è I-numerabile e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione tra spazi topologici, allora f è continua $\iff \forall \{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \rightarrow x$, si ha che $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Dimostrazione. (\implies) Sempre vera, anche senza l'ipotesi di I-numerabilità. Supponiamo f continua e sia $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \rightarrow x$. Mostriamo che $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Infatti, se $U \in I(f(x))$, allora, per continuità di f in $x \in X$, si ha $f^{-1}(U) \in I(x)$, quindi, visto che $x_n \rightarrow x$, abbiamo $x_n \in f^{-1}(U)$ definitivamente $\implies f(x_n) \in U$.

(\impliedby) Sia $A \subseteq Y$ aperto: dobbiamo mostrare che $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto. Usiamo la caratterizzazione

¹⁸ $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U \forall n \geq N$.

¹⁹ $\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N$ per cui $x_n \in C$.

degli aperti della **Proposizione 2.6.2** (visto che X è I-numerabile). Dobbiamo vedere che se $\{x_n\} \subseteq X$ e $x_n \rightarrow x \in f^{-1}(A)$, allora $x_n \in f^{-1}(A)$ definitivamente. Per ipotesi, $f(x_n) \rightarrow \underbrace{f(x) \in A}_{\text{perché } x \in f^{-1}(A)}$.

Essendo aperto, $A \in I(f(x))$, e dunque $\underbrace{f(x_n) \in A}_{\iff x_n \in f^{-1}(A)}$ definitivamente. \square

Esempio in cui le caratterizzazioni degli aperti non valgono

Esempio 23. Sia X un insieme più che numerabile con la topologia conumerabile (i cui chiusi sono sottoinsiemi al più numerabili di X e tutto X)²⁰.

Mostriamo che, se $\{x_n\} \subseteq X$, allora $x_n \rightarrow x \iff x_n = x$ definitivamente.

Dimostrazione. (\Leftarrow) Ovvio e sempre vera.

(\Rightarrow) Supponiamo che $x_n \rightarrow x$. Prendiamo $U = X \setminus \{x_n \mid x_n \neq x\}$: questo è un aperto (complementare al più numerabile) che contiene x , quindi $U \in I(x)$. Per definizione di limite, dobbiamo avere $x_n \in U$ definitivamente. Per costruzione di U , questo implica $x_n = x$ definitivamente. \square

Segue che tutti i sottoinsiemi $Y \subseteq X$ sono sequenzialmente aperti (se $x_n \rightarrow x$ e $x \in A$, allora $x_n \in A$ definitivamente) però non tutti i sottoinsiemi di X sono aperti per la topologia data, ad esempio $\{x\} \subseteq X$ per $x \in X$ non è aperto, visto che $X \setminus \{x\}$ non è al più numerabile.

Quindi la caratterizzazione degli aperti non funziona.

Segue che questo X non è I-numerabile e non funzionano neanche le caratterizzazioni dei chiusi e della continuità: $\text{Id} : (X, \tau_{\text{conum}}) \rightarrow (X, \tau_{\text{disc}})$ non è continua ma è sequenzialmente continua, perché, se $x_n \rightarrow x$ in (X, τ_{conum}) , allora $x_n = x$ definitivamente e per forza $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

(Le successioni indicizzate da \mathbb{N} non distinguono τ_{conum} da τ_{disc} .)

Fatto 2.6.4. Si può dare una definizione più generale di limiti in spazi topologici (indicizzati da insiemi “più grandi” di \mathbb{N}), che “ripara” queste caratterizzazioni nel caso I-numerabile.

Definizione 2.6.3. X spazio topologico si dice **sequenziale**, se $C \subseteq X$ è chiuso $\iff C$ è sequenzialmente chiuso.

Osservazione 44. X sequenziale $\iff A \subseteq X$ è aperto se e solo se A è sequenzialmente aperto.

Dalle **Proposizioni 2.6.1** e **2.6.2**, abbiamo che I-numerabile \implies sequenziale (il viceversa non è vero).

²⁰Vedasi anche **Esercizio 28**.

2.7 Sottospazi topologici

Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme.

Definizione 2.7.1. La **Topologia di sottospazio** (o **indotta**) su Y , che denotiamo con $\tau|_Y$, è la topologia meno fine su Y che rende $i : Y \hookrightarrow X$ una funzione continua.

Diciamo che $(Y, \tau|_Y)$ è un **sottospazio topologico** di X .

Osservazione 45. In generale, se Z è un insieme e $f : Z \rightarrow X$, allora esiste su Z la topologia meno fine che rende f continua ed è $f^{-1}\tau = \{f^{-1}(A) \mid A \subseteq X \text{ aperto}\}$.

Infatti:

- $f^{-1}\tau$ è una topologia: $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, $Z = f^{-1}(X)$, $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2)$ e infine $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.
- Se τ' è una topologia su Z , per cui $f : (Z, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ è continua, allora per forza $f^{-1}(A) \in \tau' \forall A \subseteq X$ aperto di X , dunque $f^{-1}\tau \subseteq \tau'$.

Applicando questo discorso a $i : Y \hookrightarrow X$, troviamo che

Proposizione 2.7.1. Un sottoinsieme $B \subseteq Y$ è aperto per $\tau|_Y$ se e solo se $\exists A \subseteq X$ aperto tale che $B = i^{-1}(A) = A \cap Y$ e (passando ai complementari) $D \subseteq Y$ è chiuso per $\tau|_Y$ se e solo se $\exists C \subseteq X$ chiuso tale che $D = i^{-1}(C) = C \cap Y$.

Osservazione 46. Se \mathcal{B} è una base di τ in X , allora $\mathcal{B}|_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base di $\tau|_Y$.

Infatti, se $A' \subseteq Y$ è aperto, allora $\exists A \subseteq X$ aperto tale che $A' = A \cap Y$.

Se \mathcal{B} è base di $\tau \implies \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ e quindi $A' = A \cap Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} (B \cap Y)$ è unione di elementi di $\mathcal{B}|_Y$.

Osservazione 47. Siano X topologico e $Y \subseteq X$ (i sottoinsiemi saranno sempre dotati della topologia di sottospazio):

① Se $Y \subseteq X$ è aperto, allora $A \subseteq Y$ è aperto in $X \iff A$ è aperto in Y .

Infatti, se $A \subseteq Y$ è aperto in X , allora $A = A \cap Y$, per cui A è aperto in Y ²¹. Questa implicazione è sempre vera (non usa Y aperto). Inoltre, se Y è aperto in X e $A \subseteq Y$ è un aperto di Y , allora $A = B \cap Y$ che, essendo intersezione di aperti di X , è aperto di X .

Se Y non è aperto, non è affatto vero che gli aperti di Y sono aperti anche di X : ad esempio, se $X = \mathbb{R}$ con la topologia Euclidea e $Y = \{0\}$, $\{0\}$ è un aperto di Y , ma non lo è di X .

Slogan: "Aperto di un aperto è aperto"

② Se $Y \subseteq X$ è chiuso, allora $C \subseteq Y$ è chiuso in $X \iff C$ è chiuso in Y .

Dimostrazione identica: anche qui, un chiuso di X contenuto in Y è sempre chiuso in Y , mentre, per dimostrare che un chiuso di Y è chiuso anche di X , serve Y chiuso.

Siano ora X, Z topologici e $Y \subseteq X$. Data $f : X \rightarrow Z$, sia $f|_Y : Y \rightarrow Z$ la restrizione di f a Y .

Proposizione 2.7.2. Se f è continua, allora anche $f|_Y$ lo è (cioè "restrizioni di mappe continue sono mappe continue").

Dimostrazione. $f|_Y = f \circ i$, dove $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione (continua per definizione di topologia di sottospazio), è composizione di funzioni continue. □

²¹In quanto intersezione di Y con un aperto di X .

Nello stesso spirito, vediamo una caratterizzazione della topologia di sottospazio tramite una

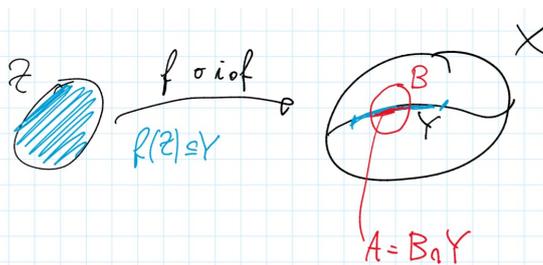
Proprietà universale:

Proposizione 2.7.3. Siano $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione di un sottospazio e $f : Z \rightarrow Y$, allora f è continua $\iff i \circ f : Z \rightarrow X$ è continua ²².

Dimostrazione. (\implies) Ovvio: i è continua e la composizione di funzioni continue è continua.

(\impliedby) Supponiamo $i \circ f : Z \rightarrow X$ continua e sia $A \subseteq Y$ un aperto di Y . Per definizione di topologia di sottospazio, $A = B \cap Y$ per qualche aperto B di X .

Perciò $f^{-1}(A) = f^{-1}(B \cap Y) = (i \circ f)^{-1}(B)$, che è aperto perché $i \circ f$ è continua. \square



²²Poiché $f(Z) \subseteq Y$.

Proposizione 2.7.4 (Proprietà universale della topologia di sottospazio).

Siano (X, τ) uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ e $\tau|_Y$ la topologia di sottospazio di Y , allora $\tau|_Y$ è l'unica topologia per cui vale la seguente **Proprietà universale**:

“ $i : (Y, \tau') \rightarrow X$ è continua e dati uno spazio topologico Z e $f : Z \rightarrow (Y, \tau|_Y)$, se $i \circ f : Z \rightarrow X$ è continua, allora anche f lo è”.

Dimostrazione. Per la **Proposizione 2.7.3**, la topologia di sottospazio effettivamente verifica la **Proprietà universale**. Vediamo che è l'unica topologia con questa proprietà.

Sia τ' una topologia su Y che verifica la **Proprietà universale**.

Applichiamo la **Proprietà universale** al caso $Z = (Y, \tau|_Y)$, con $f = \text{Id}$.

$$\begin{matrix} (Y, \tau|_Y) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau') & \xrightarrow{i} & (X, \tau) \\ Z & & Y & & X \end{matrix}$$

Proprietà universale:

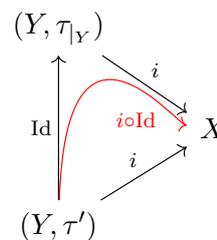
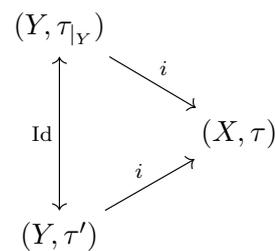
dalla continuità della composizione si ha quella di f .

In questo contesto, $i \circ f$ è l'inclusione di $(Y, \tau|_Y)$ in X che è continua. Dunque, per la **Proprietà universale**, anche $\text{Id} : (Y, \tau|_Y) \rightarrow (Y, \tau')$ è continua, perciò $\tau|_Y$ è più fine di τ' .

Ora ci sono due modi di concludere: già sappiamo che $\tau|_Y$ è la topologia meno fine che rende $i : Y \rightarrow X$ continua. Poiché anche τ' rende l'inclusione continua, $\tau|_Y$ è meno fine di τ' e dunque $\tau|_Y = \tau'$.

In alternativa, applichiamo esattamente lo stesso ragionamento già esposto, ponendo $Z = (Y, \tau')$, $f = \text{Id} : (Y, \tau') \rightarrow (Y, \tau|_Y)$ e usando la **Proprietà universale** di $(Y, \tau|_Y)$.

Per la **Proprietà universale** otteniamo la continuità di $\text{Id} : (Y, \tau') \rightarrow (Y, \tau|_Y)$, per cui l'identità è un omeomorfismo tra (Y, τ') e $(Y, \tau|_Y)$, cioè $\tau' = \tau|_Y$. \square



$i \circ \text{Id}$ è continua perché $i : (Y, \tau') \rightarrow X$ lo è.

²²Cioè la continuità “è invariante” per restrizione del codominio.

2.8 Proprietà topologiche ereditate dai sottospazi

Teorema 2.8.1. *Siano X topologico e $Y \subseteq X$, allora*

- ① se X è I-numerabile, lo è anche Y ;
- ② se X è II-numerabile, lo è anche Y ;
- ③ se X è metrizzabile, lo è anche Y ²³;
- ④ se X è metrico separabile, lo è anche Y ;
- ⑤ se X è separabile, non è detto che lo sia anche Y .

Dimostrazione. ① Siano $x_0 \in Y$ e $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un S.F.I. numerabile in X .

$\forall n \in \mathbb{N}$ poniamo $V_n = U_n \cap Y$ e verifichiamo che $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un S.F.I. numerabile di x_0 in Y .

Infatti, poiché U_n è un intorno di x_0 in X , $\exists A_n \subseteq X$ aperto tale che $x_0 \in A_n \subseteq U_n$, ma allora

$$x_0 \in (A_n \cap Y) \subseteq U_n \cap Y = V_n$$

per cui V_n è un intorno di $x_0 \forall x \in \mathbb{N}$.

Inoltre, se V è un generico intorno di x_0 in Y , allora $\exists B$ aperto di Y tale che $x_0 \in B \subseteq V$. Per definizione di topologia di sottospazio, $\exists A \subseteq X$ aperto di X tale che $B = A \cap Y$. Poiché $x_0 \in B$, si ha $x_0 \in A$, per cui A , essendo aperto, è un intorno di $x_0 \in X$. Per definizione di S.F.I., $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \subseteq A$, ma allora $V_n = U_n \cap Y \subseteq A \cap Y = B \subseteq V$, da cui la tesi.

② Se \mathcal{B} è una base numerabile di X , abbiamo visto che $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base della topologia di sottospazio, da cui la tesi.

③ Se d è una distanza su X che ne induce la topologia, allora $\mathcal{B} = \{B_d(x, R) \mid x \in X, R > 0\}$ è una base di tale topologia. Se d_Y è la restrizione di d a $Y \times Y$, otteniamo che, come già ricordato per la dimostrazione di ②, una base per la topologia di sottospazio di Y è data da

$$\mathcal{B}_Y = \{B_d(x, R) \cap Y \mid x \in X, R > 0\}$$

Se $x \in Y$, $B_d(x, R) \cap Y = B_{d_Y}(x, R)$.
palla rispetto a d_Y
che perciò vive in Y

Dunque ogni palla di d_Y è un aperto della topologia di sottospazio di Y , per cui, essendo le palle di d_Y una base della topologia associata a d_Y , abbiamo che la topologia di sottospazio di Y è più fine della topologia associata a d_Y . Vediamo che anche ogni aperto della topologia di sottospazio è un aperto per la topologia associata a d_Y .

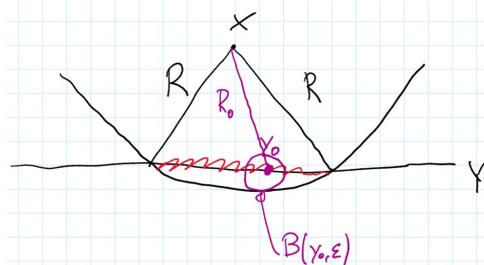
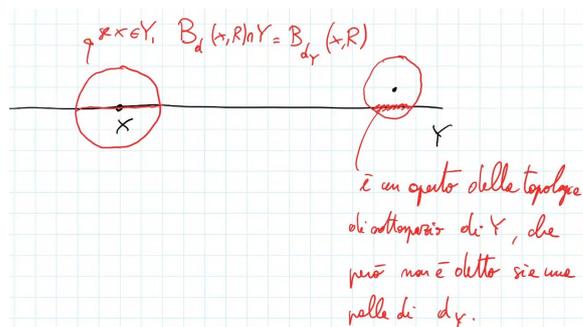
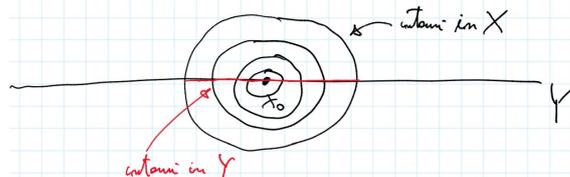
Basta vederlo per aperti di \mathcal{B}_Y , cioè dobbiamo mostrare che, se $x \in X$ e $R > 0$, allora $B_d(x, R) \cap Y$ è aperta per la topologia associata a d_Y .

Sia $y_0 \in B_d(x, R) \cap Y$, dunque $d(y_0, x) = R_0 < R$.

Poniamo $\varepsilon = \frac{R-R_0}{2} > 0$ e diciamo che $B_{d_Y}(y_0, \varepsilon) = \{y \in Y \mid d_Y(y, y_0) = d(y, y_0) < \varepsilon\} \subseteq B_d(x, R) \cap Y$.

Ciò mostra che $B_d(x, R) \cap Y$ è aperto per la topologia indotta da d_Y . Dobbiamo perciò verificare che se $y \in Y$ e $d(y, y_0) < \varepsilon$, allora $d(x, y) < R$, ma ciò segue dalla disuguaglianza triangolare:

$$d(y, x) \leq d(y, y_0) + d(y_0, x) < R_0 + \varepsilon = R_0 + \frac{R - R_0}{2} < R$$



²³Più precisamente: la restrizione ad Y della distanza di X è una distanza su Y che induce la topologia di sottospazio, cioè è indifferente prendere la topologia indotta dalla distanza o la topologia/distanza ereditata sul sottospazio.

④ Se X è metrizzabile ed è separabile, allora X è metrizzabile ed è a base numerabile, dunque (per ② e ③) Y è metrizzabile ed è a base numerabile e quindi Y è metrizzabile e separabile.

(Ricordiamo che II-numerabile \implies separabile sempre; il viceversa vale in spazi metrici.)

⑤ In realtà, dato Y qualsiasi, $\exists X$ spazio topologico separabile con un sottospazio omeomorfo a Y . (In particolare, partendo da Y non separabile, ad esempio un insieme più che numerabile con la topologia discreta, otteniamo X separabile con un sottospazio non separabile).

Dato Y topologico, sia $X = Y \cup \{\infty\}$ con questa topologia:

$$U \subseteq X \text{ è aperto} \iff U = \emptyset \text{ oppure } U = V \cup \{\infty\}, \text{ con } V \text{ aperto in } Y.$$

È immediato verificare che questa sia effettivamente una topologia ed è separabile perché $\{\infty\}$ è denso! Infatti, $\{\infty\}$ interseca ciascun aperto non vuoto di X .

Dobbiamo anche controllare che Y erediti da X la topologia che aveva in origine.

Infatti, $Z \subseteq Y$ è aperto per la topologia di sottospazio ereditata da $X \iff Z = U \cap Y$ per qualche aperto di $X \iff Z = \emptyset$ (quando $U = \emptyset$) oppure $Z = \underbrace{(V \cup \{\infty\}) \cap Y}_{=V \text{ perché } V \subseteq Y}$ per qualche aperto V di

$Y \iff Z = V$ per qualche aperto V di Y . □

2.9 Mappe aperte e chiuse

Definizione 2.9.1. Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice

- **aperta**, se $f(A)$ è aperto in $Y \forall A$ aperto in X (cioè f manda aperti in aperti);
- **chiusa**, se $f(C)$ è chiuso in $Y \forall C$ chiuso in X (cioè f manda chiusi in chiusi).

Fatto 2.9.1 (ovvio). Se $f : X \rightarrow Y$ è continua e bigettiva, allora f è aperta $\iff f$ è un omeomorfismo $\iff f$ è chiusa.

Dimostrazione. f è aperta $\iff f^{-1}$ rimanda aperti in aperti, cioè f^{-1} è continua, ossia f^{-1} rimanda chiusi in chiusi $\iff f$ è chiusa. \square

Esempio 24. La mappa $i : [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ è chiusa ma non aperta.

Infatti, se $C \subseteq [0, 1]$ è chiuso, allora $i(C)$ è chiuso in un chiuso, dunque è chiuso in \mathbb{R} . In generale, l'inclusione di un chiuso di uno spazio topologico nello spazio ambiente è chiuso. Non è aperto perché, ad esempio $[0, 1]$ è un aperto di $[0, 1]$, ma $i([0, 1]) = [0, 1]$ non è aperto in \mathbb{R} ²⁴.

Esempio 25. Anche la mappa $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (x, 0)$ è chiusa ma non aperta.

Infatti, è chiusa perché è inclusione di un sottospazio chiuso ($\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$), ma, mentre $(0, 1)$ è aperto in \mathbb{R} , $i((0, 1)) = (0, 1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ non è aperto in \mathbb{R}^2 .

Fatto 2.9.2. Se $f : X \rightarrow Y$ è aperta, allora l'immagine di f è un aperto di Y .

Dimostrazione. Infatti, $Y = f(X)$ e X è aperto in X . \square

Esempio 26. $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x$ è aperta ma non è chiusa.

Il fatto che sia aperta lo vedremo tra poco quando parleremo di *topologia prodotto*. Vediamo che non è chiusa: sia

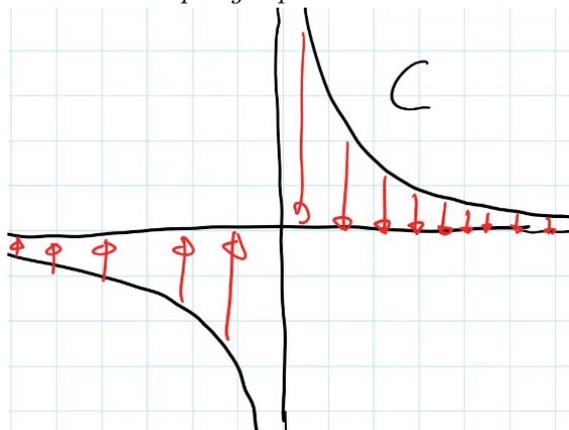
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

C è chiuso in quanto $C = f^{-1}(0)$, dove

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto xy - 1$$

è continua e $\{0\}$ è chiuso in \mathbb{R} , ma $\pi(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è chiuso in \mathbb{R} , dunque π non è chiusa.



²⁴Avremmo potuto prendere anche $(\frac{2}{3}, 1] = [0, 1] \cap (\frac{2}{3}, 2)$ che è aperto di $[0, 1]$, ma non di \mathbb{R} .

2.10 Immersioni topologiche

Definizione 2.10.1. *Un'immersione topologica è un omeomorfismo con l'immagine, cioè una $f : X \rightarrow Y$ continua tale che f induca un omeomorfismo tra X e $f(X) \subseteq Y$ (naturalmente $f(X)$ è dotato della topologia di sottospazio).*

In particolare, un'immersione topologica è sempre continua e iniettiva, ma non tutte le funzioni continue e iniettive sono immersioni topologiche ²⁵.

Teorema 2.10.1. *Sia $f : X \rightarrow Y$ continua e iniettiva, allora*

1. se f è chiusa, f è un'immersione topologica;
2. se f è aperta, f è un'immersione topologica.

Dimostrazione. (1.) Poiché f è iniettiva, è ben definita l'inversa insiemistica $g : f(X) \rightarrow X$ di f . Dobbiamo dimostrare che g è continua (se $f(X)$ è dotato della topologia di sottospazio). Questo basta, perché $f : X \rightarrow f(X)$ è continua in quanto lo è $f : X \rightarrow Y$ (già visto). Dunque vogliamo mostrare che $g^{-1}(C)$ è chiuso in $f(X) \forall C$ chiuso di X , ma, poiché f è chiusa, se C è un chiuso di X , allora $g^{-1}(C) = f(C)$ è un chiuso di Y , dunque, a maggior ragione, è anche un chiuso di $f(X)$.
 (2.) Identico a (1.) con gli aperti al posto dei chiusi. □

Naturalmente non è detto che un'immersione topologica debba essere aperta o chiusa:

Esempio 27. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (\arctan x, 0)$ è un'immersione topologica.

Infatti, $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{0\}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{0\}$ ammette l'inversa continua

$$g : \begin{matrix} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, 0) & \mapsto & \tan x \end{matrix}$$

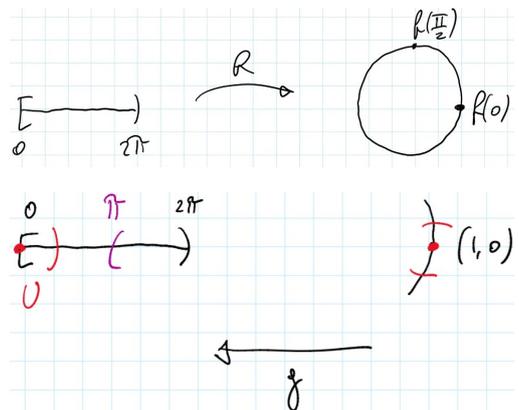
Poiché $f(X)$ non è né aperto né chiuso in \mathbb{R}^2 , f non è né aperta né chiusa.

Esempio 28. $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ è continua e iniettiva, ma non è un'immersione topologica.

Infatti, $f([0, 2\pi)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$.

L'inversa $g : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ non è continua in $f(0) = (1, 0)$; infatti, se fosse continua in $(1, 0)$, $\forall U$ intorno di $g((1, 0))$ esisterebbe un intorno V di $(1, 0)$ tale che $g(V) \subseteq U$.

Se scegliamo ad esempio $U = [0, 1)$, non esistono intorni di $(1, 0)$ in S^1 portati da g interamente dentro U : un qualsiasi intorno di $(1, 0)$ in S^1 contiene un punto P di ordinata negativa e $g(P) \in (\pi, 2\pi)$, dunque $g(P) \notin [0, 1)$.



²⁵Esempio stupido: $\text{Id} : (\mathbb{R}, \tau_E) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{indisc}})$ è continua e iniettiva, ma non è un omeomorfismo con l'immagine.

Esercizi VII settimana

Esercizio 28. Sia X un insieme più che numerabile, dotato della topologia conumerabile, i cui chiusi sono i sottoinsiemi al più numerabili di X e X stesso. Si dimostri che X non è I -numerabile.

Segue da quanto già visto: X non è sequenziale.

Vediamo però una soluzione diretta dell'esercizio.

Dimostrazione. Siano $x_0 \in X$ e, per assurdo, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un S.F.I.

Per trovare una contraddizione, vogliamo costruire un intorno V di x_0 che non contenga nessun U_n . $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $C_n = X \setminus U_n$, quindi C_n è al più numerabile (in quanto $U_n \neq \emptyset$, visto che $x_0 \in U_n$). Dunque $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ è al più numerabile. Perciò, poiché X è più che numerabile, $\exists x_1 \neq x_0$ tale che $x_1 \notin C$, cioè $x_1 \notin C_n \forall n \in \mathbb{N}$, ossia $x_1 \in U_n \forall n \in \mathbb{N}$. Poniamo quindi $V = X \setminus \{x_1\}$, quindi V è un intorno di x_0 e U_n non è contenuto in V per nessun $n \in \mathbb{N}$, perché $x_1 \in U_n$, ma $x_1 \notin V$. \square

Esercizio 27. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x \in X$ e $R \in \mathbb{R}_{>0}$, la **palla chiusa** di centro x e raggio R è

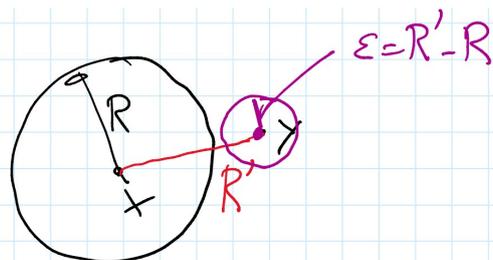
$$\overline{B}(x, R) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq R\}$$

Si mostri che per ogni $x \in X$ e $R \in \mathbb{R}_{>0}$ si ha $\overline{B}(x, R) \subseteq \overline{\overline{B}(x, R)}$ (il primo insieme è la chiusura della palla aperta) e si dia un esempio in cui non vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. Mostriamo che $\overline{B}(x, R)$ sia chiuso.

Sia $Y = X \setminus \overline{B}(x, R)$ e vediamo che Y sia aperto. Dato $y \in Y$, $d(x, y) = R' > R$. Sia dunque $\varepsilon = R' - R$ e mostriamo che $B(y, \varepsilon) \subseteq Y$. Infatti, se $z \in B(y, \varepsilon)$, allora $d(y, z) < \varepsilon$. Se, per assurdo, avessimo $d(x, z) \leq R$, allora

$$d(x, y) \leq \underbrace{d(x, z)}_{\leq R} + \underbrace{d(z, y)}_{< \varepsilon} < R + \varepsilon = R' \quad \zeta$$



Dunque, poiché $\overline{B}(x, R)$ è un chiuso che contiene la palla aperta $B(x, R)$, segue che $\overline{\overline{B}(x, R)} \subseteq \overline{B}(x, R)$. Come esempio per $\overline{B}(x, R) \subsetneq \overline{\overline{B}(x, R)}$, prendiamo (X, d) uno spazio metrico con almeno due punti e con distanza discreta ($d(x, y) = 1 \forall x \neq y$), perciò, fissato $x_0 \in X$,

$$B(x_0, 1) = \{x_0\} \implies \overline{\overline{B}(x_0, 1)} = \{x_0\}$$

mentre $\overline{B}(x_0, 1) = X$. \square

²⁶Nella topologia discreta $\overline{A} = A \forall A$.

2.11 Prodotti topologici

Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi. Ricordiamo che

$$\prod_{i \in I} X_i = \text{“prodotto (cartesiano) degli } X_i \text{”} = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \forall i \in I \right\}$$

Spesso l'elemento $f \in \prod_{i \in I} X_i$ si indica con $(x_i)_{i \in I}$, dove $x_i = f(i) \forall i \in I$.

Ad esempio, un elemento di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{27}$ si indica con (x_1, x_2) .

Sia ora X_i dotato di una topologia $\tau_i \forall i \in I$. Vogliamo definire una topologia su $\prod_{i \in I} X_i$.

Definizione 2.11.1. La **topologia prodotto** su $\prod_{i \in I} X_i$ è la topologia meno fine che rende ogni proiezione $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ continua.

Ricordiamo che $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ è definita da $\pi_i(f) = f(i)$, cioè $\pi_i((x_i)_{i \in I}) = x_i$.

Osservazione 48. La topologia discreta su $\prod_{i \in I} X_i$ rende ogni proiezione continua, per cui l'insieme delle topologie che rendono le proiezioni continue è non vuoto. Inoltre, l'intersezione di topologie è una topologia ed è facile verificare che, se $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è l'insieme delle topologie su $\prod_{i \in I} X_i$ tali che

$\pi_i : (\prod_{i \in I} X_i, \tau_\alpha) \longrightarrow X_i$ è continua $\forall \alpha \in A$ e $\forall i \in I$, allora $\tau = \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ è una topologia su $\prod_{i \in I} X_i$ (visto tempo fa).

Si vede facilmente che $\pi_i : (\prod_{i \in I} X_i, \tau) \longrightarrow X_i$ è continua²⁸ e, per costruzione, τ è chiaramente la topologia meno fine tra tutte le topologie che rendono ogni π_i continua.

Dunque la topologia prodotto è ben definita.

D'ora in poi siano fissati gli (X_i, τ_i) , con $i \in I$, e sia τ la topologia prodotto su $\prod_{i \in I} X_i$.

Proposizione 2.11.1. ① Una prebase di τ è data da $\{\pi_i^{-1}(A), i \in I, A \in \tau_i\}$.

② Una base di τ è data da $\{\pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k), k \in \mathbb{N}, i_j \in I, A_j \in \tau_{i_j}\}$.

Dimostrazione. ① Una topologia τ' su $\prod_{i \in I} X_i$ rende tutte le proiezioni continue $\iff \forall i \in I$ e $\forall A \in \tau_i$

$\pi_i^{-1}(A) \in \tau' \iff$ gli insiemi della forma $\pi_i^{-1}(A)$, con $i \in I$ e $A \in \tau_i$, sono aperti in $\tau' \iff \tau'$ contiene la topologia generata dai $\pi_i^{-1}(A)$, con $i \in I$ e $A \in \tau_i$.

Dunque la topologia prodotto τ , dovendo essere la più piccola topologia che contiene la topologia generata dai $\pi_i^{-1}(A)$, con $i \in I$ e $A \in \tau_i$, coincide con tale topologia che ha come prebase (**Teorema 2.4.3**) $\{\pi_i^{-1}(A), i \in I, A \in \tau_i\} \cup \{\prod_{i \in I} X_i\}$ ²⁹.

② segue da ① per definizione di prebase. □

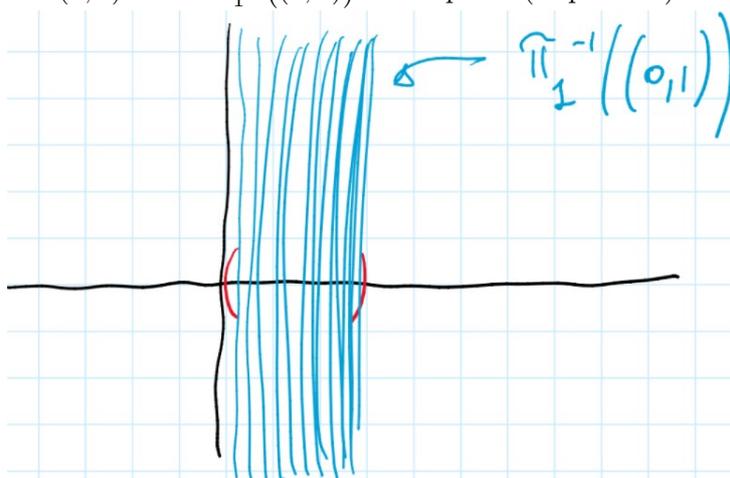
²⁷Nel nostro formalismo sarebbe una $f : \{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

²⁸Se $A \subseteq X_i$ è aperto, $\pi_i^{-1}(A) \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ è aperta per $\tau_\alpha \forall \alpha$, dunque è aperto anche per τ .

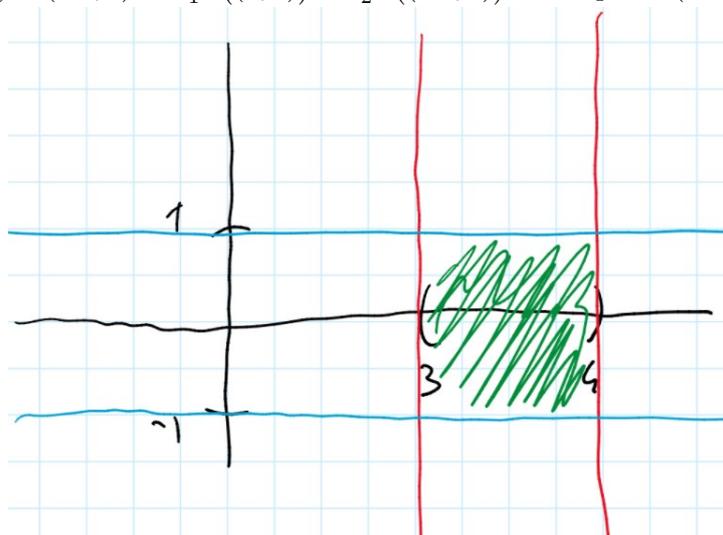
²⁹In questo caso è pleonastico, perché, preso $i_0 \in I$ a caso, $\prod_{i \in I} X_i = \pi_{i_0}^{-1}(X_{i_0})$, dunque è già compreso nel primo pezzo.

Su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ad esempio, dette π_1, π_2 le proiezioni sui due fattori,

$(0, 1) \times \mathbb{R} = \pi_1^{-1}((0, 1))$ è un aperto (di prebase):



$(3, 4) \times (-1, 1) = \pi_1^{-1}((3, 4)) \cap \pi_2^{-1}((-1, 1))$ è un aperto (di base):



Osservazione 49. Se $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ è finito, una base della topologia prodotto è data dagli aperti della forma $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_k}$, dove $A_{i_j} \in \tau_{i_j} \forall j$.

Infatti, basta notare che $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_k} = \pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k})$, perciò ogni $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_k}$ è aperto nel prodotto e da ciò è facile concludere: ad esempio,

$$\pi_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) = X_{i_1} \times A_{i_2} \times X_{i_3} \times \dots \times X_{i_k}$$

Osservazione 50. Se invece I è infinito, gli aperti di $\prod_{i \in I} X_i$ sono “molto grandi”: se A è aperto nel prodotto, A contiene un aperto della base che sarà della forma

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) = \prod_{i \in I} Y_i, \text{ con } Y_i = \begin{cases} A_i & \text{se } i = i_1, \dots, i_k \\ X_i & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Curiosità: su $\prod_{i \in I} X_i$ si può mettere anche un'altra topologia “naturale”, una cui base è data dagli insiemi della forma $\prod_{i \in I} A_i$, $A_i \in \tau_i \forall i \in I$ (cioè scegliamo un aperto per ogni coordinata, non solo per un numero finito di esse). Si tratta della **topologia delle scatole** che, quando I è infinito, è usualmente strettamente più fine della topologia prodotto.

Teorema 2.11.2. Siano Y topologico e $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$. f è continua $\iff \pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ è continua $\forall i \in I$.

Slogan: “Una funzione a valori in un prodotto è continua se e solo se lo sono le sue componenti”

Dimostrazione. (\implies) Per definizione di topologia prodotto, π_i è continua, perciò il fatto che f sia continua $\implies \pi_i \circ f$ è continua.

(\impliedby) Supponiamo $\pi_i \circ f$ continua $\forall i$. Possiamo testare la continuità di f su una prebase dello spazio di arrivo. Sia $B = \pi_i^{-1}(A)$, con $i \in I$ e $A \in \tau_i$, un tale aperto, allora

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A_i)$$

che è aperto in Y perché $\pi_i \circ f$ è continua per ipotesi. Dunque f è continua. \square

Teorema 2.11.3. *Se X, Y sono metrizzabili, allora $X \times Y$ è metrizzabile. Più precisamente, se d, d' sono distanze su X, Y che inducono le topologie, allora la topologia di $X \times Y$ è indotta da una qualsiasi di queste distanze:*

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$$

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2}$$

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$$

Dimostrazione. Quando abbiamo parlato di distanze equivalenti su \mathbb{R}^n (cioè di norma ℓ^1 , norma ℓ^2 , norma ℓ^∞), abbiamo già visto che $d_1 \leq \sqrt{2}d_2 \leq 2d_\infty \leq 2d_1$, per cui d_1, d_2, d_∞ sono distanze topologicamente equivalenti su $X \times Y$. Vogliamo vedere che tali distanze inducono effettivamente la topologia prodotto su $X \times Y$. Se dotiamo $X \times Y$ della distanza d_∞ , le proiezioni sono 1-lipschitziane, cioè, se $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ sono le proiezioni, allora

$$d(\pi_X(x_1, y_1), \pi_X(x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

$$d'(\pi_Y(x_1, y_1), \pi_Y(x_2, y_2)) = d'(y_1, y_2) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

In particolare, le proiezioni sono continue (passiamo alla continuità punto per punto e notiamo che basta scegliere $\delta = \varepsilon$).

Dunque d_∞ rende continue le proiezioni, perciò è più fine della topologia prodotto. Per vedere che coincidono, vediamo che un generico aperto di d_∞ è anche un aperto della topologia prodotto.

Basta vedere che un aperto di base di d_∞ è aperto per una topologia prodotto.

Per definizione di topologia associata a una metrica, un aperto di base di d_∞ è della forma

$$\begin{aligned} B_{d_\infty}((x, y), R) &= \{(x', y') \in X \times Y \mid d_\infty((x, y), (x', y')) < R\} = \\ &= \{(x', y') \in X \times Y \mid d(x, x') < R \text{ e } d'(y, y') < R\} = B_d(x, R) \times B_{d'}(y, R) \end{aligned}$$

che è aperto nella topologia prodotto in quanto prodotto di aperti. \square

Corollario 2.11.4. $\forall h, k \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^{h+k}$ (intendendo tutti gli spazi dotati della topologia Euclidea).

Infatti, se d_h è la distanza ℓ^1 su \mathbb{R}^h e d_k è la distanza ℓ^1 su \mathbb{R}^k , la distanza d_1 costruita nel **Teorema 2.11.3** su $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ è proprio la distanza ℓ^1 su \mathbb{R}^{h+k} .

(La stessa cosa vale combinando le distanze ℓ^2 come in d_2 o le distanze ℓ^∞ come in d_∞ .)

Teorema 2.11.5. $\forall i \in I, \pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ è aperta.

Lemma 2.11.6. $f : X \rightarrow Y$ è aperta \iff data una base \mathcal{B} di X , $f(B)$ è aperto in $Y \forall B \in \mathcal{B}$.

Dimostrazione. (**Lemma 2.11.6**) (\impliedby) Se $A \subseteq X$ è aperto, allora $\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$,

per cui $f(A) = f\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B)$ e l'unione di aperti è aperta.

(\implies) È ovvio. \square

³⁰Omeomorfo.

Dimostrazione. (**Teorema 2.11.5**) Per il **Lemma 2.11.6**, basta vedere che π_i è aperta su di una base del prodotto. Sia perciò $A = \pi_i^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_i^{-1}(A_{i_k})$ un aperto di base non vuoto. Possiamo supporre $i_j \neq i_h$ se $j \neq h$. Ora

- se $i = i_h$ per qualche h , allora $\pi_i(A) = A_{i_h}$;
- se $i \neq i_h \forall h = 1, \dots, k$, allora $\pi_i(A) = X_i$.

In ogni caso, $\pi_i(A)$ è aperto in X_i . □

Osservazione 51. Le proiezioni sono sempre aperte. Possono però non essere chiuse: abbiamo visto la volta scorsa che $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ non è chiusa ($\pi(x, y) = x$).

Proposizione 2.11.7. Siano X_α , con $\alpha \in A$, spazi topologici e $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Fissati $\bar{\alpha} \in A$ e $x_\beta \in X_\beta \forall \beta \in A \setminus \{\bar{\alpha}\}$, la funzione $i : X_{\bar{\alpha}} \rightarrow X$ data da $i(x) = f_x : A \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ e descritta da

$$f_x(\alpha) = \begin{cases} x & \text{se } \alpha = \bar{\alpha} \\ x_\beta & \text{se } \alpha = \beta \neq \bar{\alpha} \end{cases} = (y_\alpha)_{\alpha \in A}, \text{ dove } y_\alpha = \begin{cases} x & \text{se } \alpha = \bar{\alpha} \\ x_\beta & \text{se } \alpha = \beta \neq \bar{\alpha} \end{cases}$$

è un'immersione topologica.

Esempio 29. Se guardiamo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e fissiamo $\bar{\alpha} = 1$ e $x_2 \in \mathbb{R}$ abbiamo la funzione

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x_2) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Vediamo che la funzione i è continua. Usiamo la **Proprietà universale**: sia $\pi_\alpha \circ i : X_{\bar{\alpha}} \rightarrow X_\alpha$, allora i è continua $\iff \pi_\alpha \circ i$ è continua $\forall \alpha \in A$. In effetti, $\pi_\alpha \circ i : X_{\bar{\alpha}} \rightarrow X_\alpha$ è descritta da $(\pi_\alpha \circ i)(x) = \begin{cases} x & \text{se } \alpha = \bar{\alpha} \\ x_\beta & \text{se } \alpha = \beta \neq \bar{\alpha} \end{cases}$ che è una funzione continua in tutti i casi.

È chiaro che i sia iniettiva: ad esempio perché $\pi_{\bar{\alpha}} \circ i$ è biunivoca (è l'identità).

Rimane da verificare che $i : X_{\bar{\alpha}} \rightarrow i(X_{\bar{\alpha}}) \subseteq X$ sia un omeomorfismo.

L'inversa di i è $\pi_{\bar{\alpha}}|_{i(X_{\bar{\alpha}})} : i(X_{\bar{\alpha}}) \rightarrow X_{\bar{\alpha}}$ la proiezione sul fattore $X_{\bar{\alpha}}$. Questa funzione è continua (e $i(X_{\bar{\alpha}})$ ha la topologia di sottospazio di X). □

Generalizzazione: se prendiamo $A' \subseteq A$ e fissiamo $x_\beta \in X_\beta$, con $\beta \notin A'$, allora la funzione

$\prod_{\alpha \in A'} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ data da $i((x_\alpha)_{\alpha \in A'}) = (y_\alpha)$, dove $y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{se } \alpha \in A' \\ x_\beta & \text{se } \alpha = \beta \notin A' \end{cases}$, è un'immersione topologica (il caso precedente è quello in cui $A' = \{\bar{\alpha}\}$).

Dimostrazione. Stessa della **Proposizione 2.11.7**. □

2.12 Topologia della convergenza puntuale

Definizione 2.12.1. Sia Y uno spazio topologico e X un insieme. Posto

$$F(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ funzione}\} = \prod_{x \in X} Y =: Y^X$$

la topologia prodotto su questo insieme si chiama la **Topologia della convergenza puntuale**.

Proposizione 2.12.1. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F(X, Y)$, con $f \in F(X, Y)$. $f_n \rightarrow f$ per questa topologia $\iff \forall x \in X f_n(x) \rightarrow f(x)$ nello spazio topologico Y .

Dimostrazione. (\implies) Infatti, $\forall x \in X \pi_x(f_n) \rightarrow \pi_x(f)$ (già visto), $\pi_x(f_n) = f_n(x)$ e $\pi_x(f) = f(x)$.

(\impliedby) Vogliamo verificare che $f_n \rightarrow f$ in $F(X, Y)$, sapendo che $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X$.

Dato un intorno U di f in $F(X, Y)$, scegliamo un aperto di base $A \subseteq U$ tale che $f \in A$.

Quindi $A = \prod_{x \in X} A_x$, dove $A_x \subseteq Y$ è aperto di base, $A \neq Y^X$ solo per un numero finito di indici,

chiamiamoli $x_1, \dots, x_k \in X$. Visto che $f_n(x_i) \rightarrow f(x_i)$ per ipotesi, sappiamo che $f_n(x_i) \in A_{x_i}$ (intorno aperto di $f(x_i)$ in Y) definitivamente, ma allora, visto che gli x_i sono finiti, possiamo con-

$$f \in A \implies f_x \in A_x \forall x \in X$$

cludere che $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$ abbiamo $f_n(x_i) \in A_{x_i} \forall i = 1, \dots, k$. È ovvio che, se $x \neq x_i \forall i = 1, \dots, k$, allora $f_n(x) \in A_x$ (poiché in quel caso $A_x = Y$), dunque concludiamo che $f_n \in A \subseteq U \forall n \geq N$. Questo mostra $f_n \rightarrow f$. \square

2.13 Assiomi di separazione

Definizione 2.13.1. Uno spazio topologico X è (oppure “soddisfa l’assioma”):

T_0 , se $\forall x \neq y \in X \exists U \subseteq X$ aperto tale che $x \in U$ e $y \notin U$ o $x \notin U$ e $y \in U$;

T_1 , se $\forall x \neq y \in X \exists U, V \subseteq X$ aperti tali che $x \in U, y \notin U$ e $x \notin V, y \in V$;

T_2 , se $\forall x \neq y \in X \exists U, V \subseteq X$ aperti tali che $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Gli spazi T_2 si chiamano anche **spazi di Hausdorff**.

Osservazione 52. In queste definizioni è equivalente chiedere che esistano intorni (non necessariamente aperti) di x e y che soddisfano gli assiomi.

Osservazione 53. $T_2 \implies T_1 \implies T_0$.

Le implicazioni però sono strette:

Esempio 30. $T_1 \not\implies T_2$: sia X infinito con la topologia cofinita. Questo spazio è T_1 ma non T_2 . Infatti, dati $x \neq y \in X$, ad esempio, possiamo prendere $U = X \setminus \{y\}$ e $V = X \setminus \{x\}$ che sono aperti e soddisfano le richieste. Per vedere che non è T_2 , dobbiamo vedere che, se $U, V \subseteq X$ sono aperti, con $x \in U$ e $y \in V$, allora $U \cap V \neq \emptyset$. Mostriamo che, se $U, V \subseteq X$ sono aperti non vuoti, allora

$U \cap V \neq \emptyset$. Infatti, $U \cap V = X \setminus \left(\overbrace{(X \setminus U) \cup (X \setminus V)}^{\text{finito}} \right)$ e, visto che X è infinito, $U \cap V \neq \emptyset$.

Esempio 31. $T_0 \not\implies T_1$: su \mathbb{R} c’è la **topologia della semicontinuità inferiore** i cui aperti sono \emptyset, \mathbb{R} e $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$ (controllare che sia una topologia).

Questa è T_0 ma non T_1 . Infatti, se $x \neq y \in \mathbb{R}$, $(\frac{x+y}{2}, +\infty)$ è aperto e contiene esattamente uno dei due (il maggiore). Non è T_1 , perché, se $x \neq y \in \mathbb{R}$ e, senza perdita di generalità, diciamo che $x < y$, allora non esiste nessun aperto che contenga x e non y .

Esempio 32. X con almeno 2 elementi e la topologia indiscreta non soddisfa nemmeno T_0 .

Proposizione 2.13.1. Se (X, d) è metrico, allora (X, τ_d) è T_2 .

Dimostrazione. Se $x \neq y \in X$, allora $B(x, R)$ e $B(y, R)$ sono aperti e, se $R < \frac{d(x,y)}{2}$, allora sono disgiunti (per la disuguaglianza triangolare). \square

Conseguenza: spazi non di Hausdorff non sono metrizzabili.

Proposizione 2.13.2. X è $T_1 \iff$ i punti sono chiusi (cioè $\overline{\{x\}} = \{x\} \forall x \in X$) $\overset{*}{\iff}$ la topologia di X è più fine della topologia cofinita.

Dimostrazione. ($\overset{*}{\iff}$) È ovvia.

($\overset{*}{\implies}$) Se $\{x\}$ è chiuso, allora $\{x_1, \dots, x_k\}$ è chiuso (unione finita di chiusi) $\implies A \subseteq X$ con complementare finito è aperto, cioè la topologia di X è più fine della cofinita.

(\implies) Usiamo $\overline{\{x\}} = \{y \in X \mid \forall A \subseteq X \text{ aperto, con } y \in A, \text{ si ha } \overbrace{A \cap \{x\}}^{x \in A} \neq \emptyset\}$.

Sia X T_1 e, fissato $x \in X$, mostriamo $\overline{\{x\}} = \{x\}$: si ha $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ e, se $y \neq x$, sappiamo che $\exists U \subseteq X$ aperto tale che $y \in U$ e $x \notin U$. Da questo segue che $y \notin \overline{\{x\}}$ e che $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

(\impliedby) Sappiamo che $\overline{\{x\}} = \{x\} \forall x \in X$ e supponiamo di avere $x \neq y \in X$.

Visto che $y \notin \overline{\{x\}} (= \{x\})$, possiamo dedurre che $\exists V \subseteq X$ aperto tale che $y \in V$ e $x \notin V$. Partendo da $x \notin \overline{\{y\}}$, troviamo $U \subseteq X$ aperto tale che $x \in U$ e $y \notin U$. Quindi X è T_1 . \square

Proposizione 2.13.3. X è $T_2 \iff \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ è un chiuso per la topologia prodotto.

Dimostrazione. Notiamo che $(x, y) \in \Delta_X \iff x = y$ (per definizione di Δ_X).

$\Delta_X \subseteq X \times X$ è chiuso $\iff (X \times X) \setminus \Delta_X$ è aperto $\iff \forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X \exists A \times B \subseteq X \times X$

aperto di base, con $A, B \subseteq X$ aperti, tali che $(x, y) \in A \times B$ e $A \times B \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$ che è la proprietà T_2 . □

Esercizio 12. X è $T_0 \iff \forall x \neq y$ si ha $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ in X .

Corollario 2.13.4. Se $f : X \rightarrow Y$ è continua e Y è T_2 allora il grafico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y \text{ è chiuso}$$

Dimostrazione. Consideriamo $F : X \times Y \rightarrow Y \times Y$. È continua ³¹ e $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$. Y è $T_2 \implies \Delta_Y$ è chiuso $\implies \Gamma_f \subseteq X \times Y$ è chiuso. □

Corollario 2.13.5. Se $f, g : X \rightarrow Y$ sono continue e Y è T_2 , allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ è chiuso.

Dimostrazione. Analoga, prendendo come funzione $F : X \rightarrow Y \times Y$. □

Corollario 2.13.6. Nelle ipotesi del **Corollario 2.13.5**, se $f = g$ su un denso di X , allora $f = g$ su tutto X .

Dimostrazione. Ovvio dal **Corollario 2.13.5** + un chiuso denso è tutto lo spazio. □

Corollario 2.13.7. Se $f : X \rightarrow X$ è continua e X è T_2 , allora $\text{fix } f = \{x \in X \mid f(x) = x\} \subseteq X$ è chiuso.

Dimostrazione. Basta applicare il **Corollario 2.13.6** con $g(x) = x$. □

Proposizione 2.13.8 (Unicità del limite in spazi T_2).

Se X è T_2 e $\{x_n\} \subseteq X$ è una successione tale che $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, con $x, y \in X$, allora $x = y$.

Dimostrazione. Se $x \neq y$, abbiamo $U \in I(x)$ e $V \in I(y)$ disgiunti e seguirebbe che $x_n \in U \cap V = \emptyset$ definitivamente ζ □

Proposizione 2.13.9. Sia $i = 0, 1, 2$:

1. Sottospazi di uno spazio T_i sono T_i .
2. Prodotti (arbitrari) di spazi T_i sono T_i .
3. Raffinamenti di topologie T_i sono T_i .

Dimostrazione. Facciamo il caso $i = 2$ (gli altri sono simili).

(1.) Siano X uno spazio T_2 e $Y \subseteq X$ un sottospazio.

Siano $x \neq y$ in Y e vediamo che hanno intorni disgiunti di Y .

Visto che X è T_2 , $\exists U', V' \subseteq X$ aperti tali che $x \in U', y \in V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$. Ponendo $U = U' \cap Y$ e $V = V' \cap Y$, abbiamo due aperti in Y tali che $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = (U' \cap V') \cap Y = \emptyset$.

(2.) Siano X_i , con $i \in I$, spazi T_2 e $X = \prod_{i \in I} X_i$. Siano (x_i) e (y_i) due punti disgiunti di X , cioè $\exists i_0 \in I$ tale che $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Visto che X_{i_0} è T_2 , $\exists U', V' \subseteq X_{i_0}$ aperti tali che $x_{i_0} \in U', y_{i_0} \in V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$. Ponendo $U = \pi_{i_0}^{-1}(U')$ e $V = \pi_{i_0}^{-1}(V')$, abbiamo due aperti (π_{i_0} è continua) di X tali che $(x_i) \in U$, $(y_i) \in V$ e $U \cap V = \pi_{i_0}^{-1}(U' \cap V') = \pi_{i_0}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(3.) Se τ, τ' sono topologie su X , $\tau \subseteq \tau'$ ed è T_2 , allora anche τ' è T_2 : chiaro perché tutti gli aperti di τ sono anche aperti di τ' . □

³¹Perché le “componenti” sono funzioni continue.

Definizione 2.13.2. Uno spazio topologico X è (oppure “soddisfa l’assioma”):

T_3 , se $\forall x \in X$ e $\forall C \subseteq X$ chiuso tale che $x \notin C \exists U, V \subseteq X$ aperti tali che $x \in U$, $C \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$;

T_4 , se $\forall C, D \subseteq X$ chiusi tali che $C \cap D = \emptyset \exists U, V \subseteq X$ aperti tali che $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Osservazione 54. Se X è T_1 , allora $T_4 \implies T_3 \implies T_2$.
 \iff i singoli
sono chiusi

Esempio 33. Se X è un insieme tale che $|X| \geq 2$ con la topologia indiscreta, allora X è T_3 e T_4 , ma $\underbrace{\text{gli unici chiusi}}_{\text{sono } \emptyset \text{ e } X}$ non è T_2, T_1, T_0 .

Definizione 2.13.3. X si dice **regolare**, se è T_1 e T_3 , e **normale**, se è T_1 e T_4 .

Le implicazioni di sopra mostrano che normale \implies regolare \implies Hausdorff.

Definizione 2.13.4. Dati (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$, $d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ è detta **distanza di un punto da un sottoinsieme in uno spazio metrico**.

Definizione 2.13.5. Una funzione $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ si dice **k -lipschitziana**, con $k \in \mathbb{R}_{>0}$, se $d'(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) \forall x, y \in X$.

Osservazione 55. Se f è k -lipschitziana per qualche k , allora è continua: dato ε nella definizione di continuità, basta prendere $\delta < \frac{\varepsilon}{k}$.

Proposizione 2.13.10. $d_A : (X, d) \longrightarrow [0, +\infty)$ ³² è 1-lipschitziana (quindi continua).

Dimostrazione. Fissati $x, y \in X$, dobbiamo far vedere che $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$. Dato $a \in A$, abbiamo $d(a, x) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Segue che $d_A(x) = \inf\{d(a, x) \mid a \in A\} \leq d(x, y) + d(y, a) \forall a \in A$, quindi, passando all’inf a secondo membro, otteniamo $d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y)$, cioè

$$d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$$

Scambiando x e y , otteniamo $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$ e, combinando le due, abbiamo la tesi. \square

Proposizione 2.13.11. Se (X, d) è uno spazio metrico, allora (X, τ_d) è normale (cioè T_1 e T_4).

Dimostrazione. Abbiamo visto che (X, τ_d) è T_2 , quindi è anche T_1 . Siano quindi $C, D \subseteq X$ chiusi tali che $C \cap D = \emptyset$ e consideriamo le funzioni $d_C : X \longrightarrow [0, +\infty)$ e $d_D : X \longrightarrow [0, +\infty)$, dove $d_C(x) = \inf\{d(x, c) \mid c \in C\}$ e $d_D(x) = \inf\{d(x, d') \mid d' \in D\}$.

Per la **Proposizione 2.13.10**, abbiamo che d_C e d_D sono continue.

Lemma 2.13.12. Se $C \subseteq X$ è chiuso, allora $C = d_C^{-1}(0)$.

Dimostrazione. $d_C : X \longrightarrow [0, +\infty)$ è continua, quindi, visto che $\{0\} \subseteq [0, +\infty)$ è chiuso, $d_C^{-1}(0) \subseteq X$ è chiuso e contiene C , dal momento che chiaramente, se $x \in C$, allora $d_C(x) = 0$. Dunque $C \subseteq d_C^{-1}(0)$. Se $y \in d_C^{-1}(0)$, allora $\inf\{d(y, c) \mid c \in C\} = 0$, quindi $\exists \{c_n\} \in C$ successione tale che $d(y, c_n) < \frac{1}{n}$. Segue che ogni intorno di y interseca l’insieme C ³³, quindi $y \in \overline{C}$ e, visto che C è chiuso, abbiamo $\overline{C} = C$, dunque $y \in C$. \square

(La stessa dimostrazione fa vedere che se non sappiamo che C è chiuso, allora $d_C^{-1}(0) = \overline{C}$.)
Consideriamo

$$f(x) = \frac{d_D(x)}{d_D(x) + d_C(x)} : X \longrightarrow [0, 1]$$

³²Con la distanza Euclidea.

³³Visto che deve contenere $B(y, \frac{1}{n})$ per n abbastanza grande.

È ben definita, perché se $d_C(x) + d_D(x) = 0 \implies d_D(x) = d_C(x) = 0 \implies x \in C \cap D = \emptyset$.
È anche continua: la funzione

$$g(x, y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{x}{x+y}$$

è continua ed $f(x) = g(d_D(x), d_C(x))$, dunque è continua visto che $x \mapsto (d_D(x), d_C(x))$ ha immagine in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Ora osserviamo che

$$f(x) = 0 \iff d_D(x) = 0 \iff x \in D \quad (D = f^{-1}(0))$$

e che

$$f(x) = 1 \iff \frac{d_D(x)}{d_D(x) + d_C(x)} = 1 \iff d_C(x) = 0 \iff x \in C \quad (C = f^{-1}(1))$$

Siano ora $U' = (\frac{2}{3}, 1]$, $V' = [0, \frac{1}{3})$ aperti di $[0, 1]$ e poniamo $U = f^{-1}(U') \subseteq X$, $V = f^{-1}(V') \subseteq X$. Questi sono aperti disgiunti ($U \cap V = f^{-1}(U') \cap f^{-1}(V') = f^{-1}(U' \cap V') = \emptyset$) e abbiamo $C \subseteq U$, $D \subseteq V$. Questo mostra la proprietà T_4 . \square

Curiosità (Lemma di Urysohn): se X è T_4 e $C, D \subseteq X$ sono chiusi tali che $C \cap D = \emptyset$, allora $\exists f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $D = f^{-1}(0)$ e $C = f^{-1}(1)$.

Proposizione 2.13.13. *Uno spazio topologico X è $T_3 \iff \forall x \in X$ e $U \subseteq X$ aperto tale che $x \in U \exists V \subseteq X$ aperto tale che $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.*

(Questo è equivalente a dire che gli intorni chiusi formano un S.F.I. attorno a qualsiasi $x \in X$.)

Dimostrazione. (\implies) Supponiamo che X sia T_3 e di avere $x \in X$ e $U \subseteq X$ aperto tale che $x \in U$. Applichiamo l'assioma T_3 a x e $C = X \setminus U$, concludendo che $\exists V, W \subseteq X$ aperti tali che $x \in V$, $C \subseteq W$ e $V \cap W = \emptyset$. Vediamo che $\bar{V} \subseteq U$: $\boxed{*} \implies \bar{V} \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus C = U$ e quindi $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$, come volevamo.

(\impliedby) Dobbiamo mostrare che X è T_3 : siano $x \in X$ e $C \subseteq X$ chiuso tale che $x \notin C$. Prendiamo $U = X \setminus C$ aperto tale che $x \in U$. Quindi $\exists V \subseteq X$ tale che $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Sia $W = X \setminus \bar{V} \subseteq X$ aperto. Diciamo che $C \subseteq W$: questo è vero se e solo se $\overline{X \setminus W} \subseteq \overline{X \setminus C}$ che è vero.

Quindi abbiamo due aperti V, W tali che $x \in V$, $C \subseteq W$ e $\overline{V \cap W} = \emptyset$.
 $= \overline{V \cap (X \setminus \bar{V})}$
 $= \overline{V \cap W}$
 $= \emptyset$

Proposizione 2.13.14. ① *Sottospazi di spazi T_3 sono T_3 .*

② *Sottospazi chiusi di spazi T_4 sono T_4 .*

③ *Prodotti arbitrari di spazi T_3 sono T_3 .*

Dimostrazione. ① Sia X uno spazio T_3 e $Y \subseteq X$ un sottospazio topologico. Vediamo che Y è T_3 . Siano $x \in Y$ e $C \subseteq Y$ un chiuso tale che $x \notin C$. Sia $C' \subseteq X$ un chiuso tale che $C = C' \cap Y$ ³⁴. Chiaramente $x \notin C'$.

Usiamo la proprietà T_3 di X : troviamo $U', V' \subseteq X$ aperti, con $U' \cap V' = \emptyset$, tali che $x \in U'$ e $C' \subseteq V'$. Poniamo $U = U' \cap Y$ e $V = V' \cap Y$ aperti in Y , con $U \cap V = \emptyset$, tali che $x \in U$ e $C = C' \cap Y \subseteq V' \cap Y = V$. Dunque Y è T_3 .

② Se X è T_4 e $Y \subseteq X$ è un sottospazio topologico chiuso, dati $C, D \subseteq Y$ chiusi tali che $C \cap D = \emptyset$, allora C e D sono chiusi anche in X e quindi $\exists U', V' \subseteq X$ aperti, con $U' \cap V' = \emptyset$, tali che $C \subseteq U'$ e $D \subseteq V'$. Ponendo $U = U' \cap Y$ e $V = V' \cap Y$, abbiamo due aperti di Y tali che $U \cap V = \emptyset$, $C \subseteq U' \cap Y = U$ e $D \subseteq V' \cap Y = V$.

③ Siano X_i , con $i \in I$, spazi T_3 . Vogliamo mostrare che $X = \prod_{i \in I} X_i$ è T_3 .

³⁴Usando la definizione di topologia di sottospazio.

Usiamo la caratterizzazione alternativa di T_3 della **Proposizione 2.13.13**: supponiamo di avere $(x_i) \in X$ e un aperto $V \subseteq X$ tale che $(x_i) \in V$. Vogliamo vedere che $\exists U \subseteq X$ aperto tale che $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$. Prendiamo un aperto di base $A = \prod_{i \in I} A_i$ (in cui $A_i \subseteq X_i$ è aperto e vale l'uguaglianza $x \in A \subseteq V$), tale che $x \in A \subseteq V$.

In X_i abbiamo un aperto A_i tale che $x_i \in A_i$. Usando T_3 , possiamo trovare un aperto $B_i \subseteq X_i$ aperto tale che $x_i \in B_i \subseteq \overline{B_i} \subseteq A_i$ (se $A_i = X_i$, poniamo $B_i = X_i$).

Consideriamo $B = \prod_{i \in I} B_i$: questo è un aperto di base di X .

Vogliamo vedere che $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq A$. Partendo da $\overline{B_i} \subseteq A_i$, troviamo che $\prod_{i \in I} \overline{B_i} \subseteq \prod_{i \in I} A_i = A$.

Inoltre, visto che $B_i \subseteq \overline{B_i}$, abbiamo anche che $B = \prod_{i \in I} B_i \subseteq \prod_{i \in I} \overline{B_i}$. Basta verificare che $\prod_{i \in I} \overline{B_i}$ è un chiuso di X , perché poi avremo $\overline{B} \subseteq \prod_{i \in I} \overline{B_i} \subseteq A$ e dunque la tesi.

Lemma 2.13.15. Se $C_i \subseteq X_i$ sono chiusi, allora $\prod_{i \in I} C_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ è chiuso.

Dimostrazione. Se $\pi_i : X \rightarrow X_i$, allora $\prod_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(C_i)$. □

Segue che $\prod_{i \in I} \overline{B_i} \subseteq X$ è chiuso e quindi la tesi. □

Fatto 2.13.16. Raffinamenti di topologie T_3/T_4 possono non essere T_3/T_4 .
Prodotti di spazi T_4 possono non essere T_4 e lo stesso per sottospazi.

Fatto 2.13.17. Le implicazioni

$$\text{metrizzabile} \implies \text{normale} \implies \text{regolare} \implies \text{Hausdorff}$$

non si invertono.

Esercizi VIII settimana

Esercizio 32. Dotiamo \mathbb{C} dell'usuale topologia Euclidea, cioè identifichiamolo con \mathbb{R}^2 dotato della topologia Euclidea. Inoltre, dotiamo ogni sottoinsieme di \mathbb{C} della topologia di sottospazio e sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

(1) Si dica se la restrizione di f a $H_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ sia un'immersione topologica.

(2) Si dica se la restrizione di f a $H_2 = H_1 \cup \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$ sia un'immersione topologica.

Dimostrazione. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua: in coordinate cartesiane, questa funzione si scrive nel seguente modo:

$$\text{se } z = x + iy \text{ (} = (x, y) \text{), allora } z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \text{ (} = (x^2 - y^2, 2xy) \text{)}$$

La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ è continua³⁵.
Segue che $f|_{H_1} : H_1 \rightarrow f(H_1) \subseteq \mathbb{C}$ e $f|_{H_2} : H_2 \rightarrow f(H_2) \subseteq \mathbb{C}$ sono continue.

Se $f : X \rightarrow Y$ è continua e $Z \subseteq X$ è un sottoinsieme, allora $f|_Z : Z \rightarrow f(Z)$ è continua, dove $Z \subseteq X$ e $f(Z) \subseteq Y$ hanno la topologia di sottospazio.

Infatti, la composizione $f : Z \subseteq X \rightarrow Y$ è continua, perché le due funzioni sono continue, avendo valori in $f(Z)$, si fattorizza insiemisticamente $f|_Z : Z \rightarrow f(Z) \subseteq Y$ perciò, per la **Proprietà universale** della topologia di sottospazio di $f(Z)$, segue che $f|_Z$ è continua.

Conseguenza: se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo e $Z \subseteq X$ è un sottoinsieme di X , allora $f|_Z : Z \rightarrow f(Z)$ è un omeomorfismo.

(1) Vediamo che $f|_{H_1}$ sia iniettiva: usiamo le coordinate polari³⁶.

Se scriviamo $z = \rho e^{i\theta}$, con $\rho \geq 0$, $\rho \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, allora $f(z) = z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$.

$z \in H_1 \iff \rho > 0$ e $0 < \theta < \pi$, quindi $z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$, con $\rho^2 > 0$ e $0 < 2\theta < 2\pi$ e dunque l'immagine $f(H_1) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$.

Vediamo anche che $f|_{H_1} : H_1 \rightarrow f(H_1)$ sia iniettiva. Scriviamo l'inversa:

se $z = Ae^{iB}$, con $A > 0$ e $0 < B < 2\pi$, allora le controimmagini tramite f sono i $\rho e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ e $0 < \theta < \pi$, tali che

$$\rho^2 e^{i2\theta} = Ae^{iB} \implies \begin{cases} \rho^2 = A & \implies \boxed{\rho = \sqrt{A}} \\ e^{i2\theta} = e^{iB} & \implies \theta = \frac{B}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \implies_{0 < \theta, \frac{B}{2} < \pi} \boxed{\theta = \frac{B}{2}} \end{cases}$$

Questo mostra che $f|_{H_1} : H_1 \rightarrow f(H_1)$ sia biunivoca e l'inversa manda Ae^{iB} in $\sqrt{A}e^{i\frac{B}{2}}$.

Per controllare la continuità dell'inversa, usiamo ancora le coordinate polari, però adesso ci dobbiamo preoccupare della topologia:

$$g_1 : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\} \\ (\rho, \theta) \longmapsto \rho e^{i\theta} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Vediamo che g_1 sia un omeomorfismo (poi lo stesso sarà vero per $g_2 : \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \rightarrow H_1$, restrizione di g_1). È chiaro che g_1 sia biunivoca e continua, vediamo però che l'inversa sia continua.

L'inversa si scrive così: $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$,
se $y=0 \implies x < 0$

$$g_1^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right) & \text{se } y \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right) & \text{se } y \leq 0 \end{cases} \quad \text{le due formule hanno lo stesso risultato se } y = 0.$$

³⁵Ha componenti continue.

³⁶Per il momento senza preoccuparci della topologia.

Per controllare che g_1^{-1} sia continua, ad esempio, si possono usare le successioni ³⁷.
 Dobbiamo vedere che data $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$ tale che $z_n \rightarrow z$, si ha che $g_1^{-1}(z_n) \rightarrow g_1^{-1}(z)$.
 Se chiamiamo $z_n = a_n + ib_n$ e $z = a + ib$, allora stiamo chiedendo che $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$.
 Sulla prima componente $\sqrt{x^2 + y^2}$ la convergenza è chiara.
 Per la seconda componente, le funzioni $\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ e $2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ sono continue nel loro dominio $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ e “si raccordano bene” nei punti $(x,0)$ (cioè (x,y) con $y = 0$).
 Un po’ più formalmente: se $b = \text{Im}(z) > 0$, allora $b_n = \text{Im}(z_n) > 0$ definitivamente, quindi, per continuità di $\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, abbiamo la convergenza che volevamo. Stessa cosa se $b < 0$.
 Se invece $b = 0$, “spezziamo” z_n nelle sottosuccessioni per cui $\text{Im}(z_n) \geq 0$ ($\text{Im}(z_n) < 0$ rispettivamente).
 Per queste due sottosuccessioni concludiamo la convergenza che volevamo come nei casi precedenti e segue che $g_1^{-1}(z_n) \rightarrow g_1^{-1}(z)$. Ora

$$\begin{array}{ccc}
 H_1 & \xrightarrow{f|_{H_1}} & f(H_1) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\} \\
 \cong \uparrow g_2 & \curvearrowright & \cong \uparrow g_1 \\
 \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) & \xleftarrow{h} & \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)
 \end{array}$$

dove $h : (\rho, \theta) \mapsto (\sqrt{\rho}, \frac{\theta}{2})$ è l’inversa di f calcolata prima usando le coordinate polari

e l’inversa di $f|_{H_1}$ è $g_2 \circ h \circ g_1^{-1}$, quindi basta controllare che h sia continua, il che è evidente.

(2) Ora il dominio è $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0 \vee \text{Im}(z) = 0 \wedge \text{Re}(z) > 0\}$ e l’immagine è $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$.

(Controllare che $f|_{H_2}$ sia ancora iniettiva.)

L’inversa non sembra continua, perché non tutti i punti vicini a $1 \in \mathbb{C}$ nell’immagine vanno vicino a $f|_{H_2}^{-1}(1) = 1 \in \mathbb{C}$ nel dominio. Per vedere che effettivamente $f|_{H_2}^{-1}$ non sia continua, basta prendere, ad

esempio, la successione $z_n = e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}$ che converge a 1 e notare che invece $f|_{H_2}^{-1}(z_n) = e^{i(\pi - \frac{1}{2n})}$ non converge a 1 nel dominio. \square

³⁷Tutti gli spazi sono I-numerabili.

2.14 Ricoprimenti fondamentali

Definizione 2.14.1. Un **ricoprimento** di uno spazio topologico X è una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di X tale che $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Un ricoprimento si dice **aperto** se A_i è aperto $\forall i \in I$ e **chiuso** se A_i è chiuso $\forall i \in I$.

Un ricoprimento si dice **fondamentale** se vale che $Y \subseteq X$ è aperto $\iff Y \cap A_i \subseteq A_i$ ³⁸ è aperto $\forall i \in I$ ³⁹ (\implies è sempre vera). È equivalente chiedere che $Y \subseteq X$ è chiuso $\iff Y \cap A_i \subseteq A_i$ è chiuso $\forall i \in I$ (passando ai complementari).

Teorema 2.14.1. Siano $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento fondamentale di X e $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra spazi topologici. f è continua $\iff f|_{A_i} : A_i \rightarrow Y$ è continua $\forall i \in I$.

Dimostrazione. (\implies) Già vista.

(\impliedby) Dobbiamo verificare che f sia continua.

Sia quindi $U \subseteq Y$ un aperto e mostriamo che $f^{-1}(U) \subseteq X$ è aperto. Per definizione di ricoprimento fondamentale, ci basta verificare che $f^{-1}(U) \cap A_i$ è aperto in A_i $\forall i \in I$.

Questo è vero perché $f^{-1}(U) \cap A_i = f|_{A_i}^{-1}(U) \subseteq A_i$ ed è aperto per continuità di $f|_{A_i}$. \square

Teorema 2.14.2. I ricoprimenti aperti sono fondamentali.

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme tale che $Y \cap A_i \subseteq A_i$ sia aperto (e stiamo supponendo che $A_i \subseteq X$ sia aperto $\forall i \in I$).

$$Y = \bigcup_{i \in I} (Y \cap A_i) \quad \left(= Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = Y \cap X = Y \right)$$

aperti di X in
quanto aperti di A_i
+ A_i aperto di X

quindi Y è aperto in quanto unione di aperti. \square

Qualche osservazione:

se $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$ sono sottoinsiemi, allora $\overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i}$.

Infatti, se $Y_i \subseteq \overline{Y_i}$, allora $\bigcup_{i=1}^n Y_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i}$ e dunque $\overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i}}$.
chiuso di X

Da $Y_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n Y_i$, si ha $\overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i} \forall i = 1, \dots, n$ e quindi $\bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i}$.

(L'ultima inclusione vale anche se gli Y_i sono in numero infinito).

Domanda: se abbiamo sottoinsiemi $Y_i \subseteq X$, con $i \in I$, è vero che $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \stackrel{*}{=} \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$?

Esempio 34. In \mathbb{R} , prendiamo $Y_q = \{q\}$, con $q \in \mathbb{Q}$. $\overline{Y_q} = Y_q$, dunque $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \overline{Y_q} = \mathbb{Q}$, ma $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} Y_q = \mathbb{Q}$, quindi $\overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} Y_q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e si ha che i due sottoinsiemi sono diversi.

L'uguaglianza $*$ è vera per famiglie localmente finite.

Famiglie localmente finite

Abbiamo già visto che, se X è topologico e Y_1, \dots, Y_k sono sottoinsiemi, allora $\overline{\bigcup_{i=1}^k Y_i} = \bigcup_{i=1}^k \overline{Y_i}$. Questo però in generale non vale per unioni infinite.

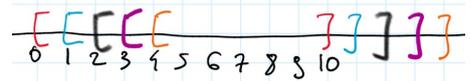
Abbiamo definito una famiglia di sottospazi $\{Y_i\}_{i \in I}$ essere **localmente finita**, se $\forall x \in X \exists U$ intorno di x tale che $\#\{i \in I \mid Y_i \cap U \neq \emptyset\} < +\infty$.

³⁸Dotato della topologia di sottospazio.

³⁹Il fatto che Y sia aperto si può testare negli A_i .

Esempio 35. Se $Y_q = \{q\}$, allora la famiglia $\{Y_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$ non è localmente finita in \mathbb{R} .

Esempio 36. Se $X = \mathbb{R}$, allora la famiglia $\{[i, i + 10]\}_{i \in \mathbb{N}}$ è localmente finita: dato $x \in \mathbb{R}$, il suo intorno $U = (x - 1, x + 1)$ interseca al più 12 elementi della famiglia.



Teorema 2.14.3. Se $\{Y_i\}_{i \in I}$ è una famiglia localmente finita di sottospazi di X , allora

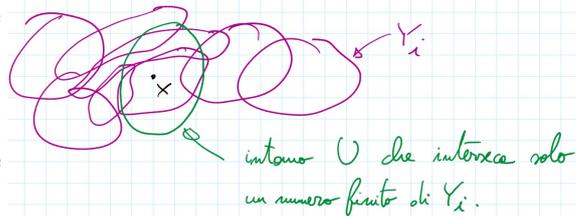
$$\overline{\bigcup_{i \in I} Y_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$$

Dimostrazione. Un'inclusione è sempre vera:

$$Y_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i \implies \overline{Y_{i_0}} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i} \quad \forall i_0 \in I \implies \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$$

Viceversa: sia $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$. Per ipotesi $\exists U$ aperto tale che $x \in U$ e $J = \{i \in I \mid U \cap Y_i \neq \emptyset\}$ finito.

Vogliamo mostrare che $x \in \bigcup_{i \in J} \overline{Y_i}$. Per una delle caratterizzazioni della chiusura, ci basta vedere che, se V è un qualsiasi intorno di x , allora $V \cap (\bigcup_{i \in J} Y_i) \neq \emptyset$.



Dato un tale V , $V \cap U$ è intersezione di due intorni di x , perciò è un intorno di x , dunque, poiché $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$, si ha $V \cap U \cap (\bigcup_{i \in I} Y_i) \neq \emptyset$, ma $U \cap Y_i = \emptyset \quad \forall i \notin J \implies V \cap U \cap (\bigcup_{i \in I} Y_i) \neq \emptyset$, quindi, a maggior ragione, $V \cap (\bigcup_{i \in J} Y_i) \neq \emptyset$. Perciò $x \in \overline{\bigcup_{i \in J} Y_i} \stackrel{40}{=} \bigcup_{i \in J} \overline{Y_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$. \square

Teorema 2.14.4. Se $\{Y_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento chiuso e localmente finito di X , allora il ricoprimento è fondamentale.

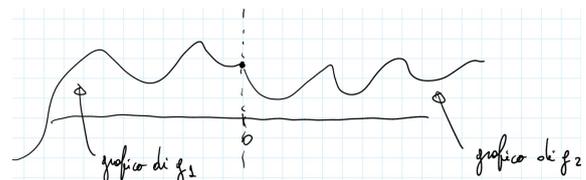
Dimostrazione. Sia $C \subseteq X$ tale che $C \cap Y_i$ sia chiuso in $Y_i \quad \forall i$ e mostriamo che C è chiuso in X . Poiché Y_i è chiuso $\forall i$ e chiuso di un chiuso è chiuso in X , abbiamo che $Y_i \cap C$ è chiuso di $X \quad \forall i$. Ovviamente, poiché $\{Y_i\}_{i \in I}$ è localmente finita, anche $\{Y_i \cap C\}_{i \in I}$ è localmente finita, per cui

$$C = \bigcup_{i \in I} (Y_i \cap C) = \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i \cap C} = \overline{\bigcup_{i \in I} (Y_i \cap C)} = \overline{C}$$

per cui $C = \overline{C}$, cioè C è chiuso. \square

Esempio 37. Se $X = \mathbb{R}$, $Y_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $Y_2 = \{0\}$, allora $\{Y_1, Y_2\}$ non è fondamentale. Ad esempio, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f(x) = 0 \quad \forall x \in Y_1$ e $f(0) = 1$, allora $f|_{Y_1}$ e $f|_{Y_2}$ sono costanti, dunque continue, ma f non è globalmente continua (ovvio da Analisi 1).

Esempio 38. Se $X = \mathbb{R}$, $Y_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ e $Y_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, allora $\{Y_1, Y_2\}$ è un ricoprimento chiuso e finito (dunque localmente finito), perciò è fondamentale.



Dunque, se $g_1 : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue e $g_1(0) = g_2(0)$, allora $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ottenuta ponendo $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \leq 0 \\ g_2(x) & x \geq 0 \end{cases}$ è continua (in quanto sono continue le sue restrizioni su un ricoprimento fondamentale).

⁴⁰Già dimostrato per unioni finite.
⁴¹Perché gli Y_i ricoprono X .
⁴²Perché $Y_i \cap C$ è chiuso in X .
⁴³Per locale finitezza.

In generale, capita spesso di avere funzioni $g_i : Y_i \rightarrow Z_i$, con $i = 1, 2$, continue tali che $X = Y_1 \cup Y_2$ e di volerle “attaccare” per produrre una g continua.

Se $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, cioè $X = Y_1 \sqcup Y_2$, non abbiamo problemi a definire g , ma tipicamente $\{Y_1, Y_2\}$ non sarà fondamentale e dunque non potremo dire nulla della continuità di g ⁴⁴.

Se invece $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, allora è possibile che $\{Y_1, Y_2\}$ sia fondamentale ⁴⁵, però bisogna ovviamente controllare la buona definizione di g che estende g_1 e g_2 , cioè che $g_1(x) = g_2(x) \forall x \in Y_1 \cap Y_2$ (ci troveremo spesso a seguire questa strategia).

Esempio fondamentale: la giunzione di cammini

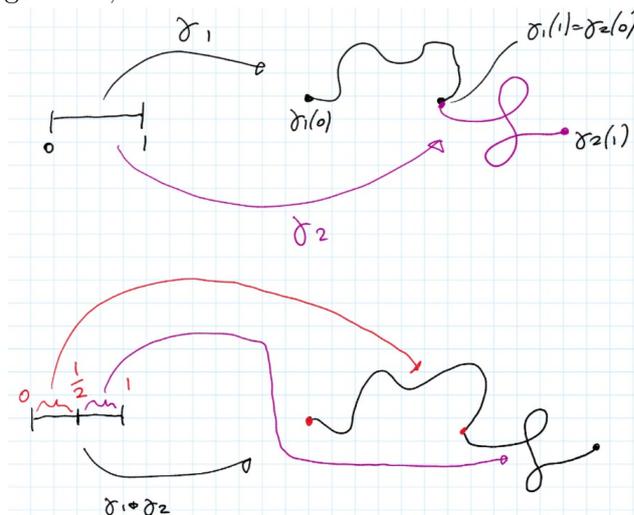
Attenzione! Nei casi di cui sopra (cioè $g_1 : Y_1 \rightarrow Z, g_2 : Y_2 \rightarrow Z$ da “attaccare” per definire $g : X \rightarrow Z$), guardate con diffidenza a dimostrazioni della continuità di g che usino limiti (tipicamente per $x \rightarrow x_0$, dove $x_0 \in \partial Y_1$ o $x_0 \in \partial Y_2 \dots$). Se Z è generico, il limite non è neanche unico!

Definizione 2.14.2. Un **cammino** a valori in uno spazio topologico X è una funzione continua

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X.$$

Dati due cammini $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ tali che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, la loro **giunzione** $\gamma_1 * \gamma_2$ è definita da $\gamma_1 * \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ con

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Teorema 2.14.5. La giunzione di cammini è un cammino (cioè $\gamma_1 * \gamma_2$ è effettivamente continua).

Dimostrazione. Le funzioni $\varphi : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$ e $\psi : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1]$ sono continue, per cui sono continue anche le composizioni $\gamma_1 \circ \varphi : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow X$ e $\gamma_2 \circ \psi : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow X$, inoltre esse coincidono su $\frac{1}{2}$, in quanto stiamo assumendo $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.

Poiché $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ è un ricoprimento fondamentale di $[0, 1]$ ⁴⁶, la tesi segue. □

Evitiamo discorsi del tipo

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} (\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} (\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \gamma_1 * \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

per verificare la continuità di $\gamma_1 * \gamma_2$.

⁴⁴Vedremo fra poco che se $\{Y_1, Y_2\}$ è fondamentale e $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, allora X è sconnesso...

⁴⁵Lo è ad esempio se Y_1, Y_2 sono entrambi aperti o entrambi chiusi.

⁴⁶È chiuso e finito.

② Se X è connesso per archi, allora $f(X)$ è connesso per archi.

Dimostrazione. ① Supponiamo per assurdo $f(X)$ sconnesso e sia $f(X) = A \sqcup B$, con A, B aperti non vuoti di $f(X)$. f è continua $\implies f$ è continua anche come mappa da X in $f(X)$. Dunque $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti di X , sono disgiunti perché

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

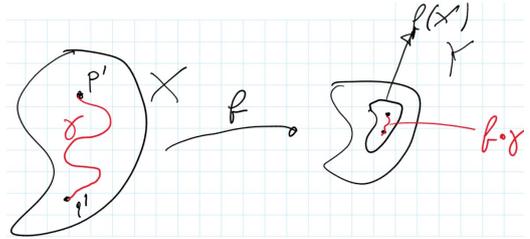
ricoprono X perché $A \cup B = f(X)$ e sono entrambi non vuoti perché

$$A \cap f(X) = A \neq \emptyset \text{ e } B \cap f(X) = B \neq \emptyset$$

assurdo perché X era connesso.

② Siano $p, q \in f(X)$ e siano $p', q' \in X$ tali che $p = f(p')$ e $q = f(q')$.

Per ipotesi, $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ cammino tale che $\gamma(0) = p'$ e $\gamma(1) = q'$. Il cammino $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow f(X)$ è continuo (in quanto composizione di funzioni continue), $f \circ \gamma(0) = p$ e $f \circ \gamma(1) = q$.



□

Connessi di \mathbb{R}

Teorema 2.15.4. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, sono fatti equivalenti:

- ① A è un intervallo (cioè A è convesso).
- ② A è connesso per archi.
- ③ A è connesso.

Dimostrazione. (① \implies ②) Siano $a, b \in A$ tali che $a \leq b$. Per ipotesi, $[a, b] \subseteq A$, perciò

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (1-t)a + tb \end{aligned}$$

ha valori in A e fornisce quindi un cammino che congiunge a e b in A . Dunque A è connesso per archi.

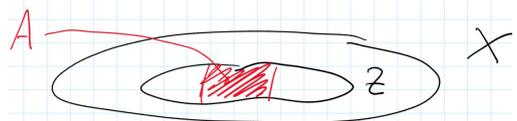
(② \implies ③) Sempre vero (già dimostrato).

(③ \implies ①) Sia A connesso. Per assurdo, se A non fosse un intervallo, esisterebbero $a, b \in A$ e $c \notin A$ tali che $a < c < b$ (cioè $[a, b] \not\subseteq A$). Dunque $A = (A \cap (-\infty, c)) \cup (A \cap (c, +\infty))$.

Per definizione di topologia di sottospazio, $A \cap (-\infty, c)$ e $A \cap (c, +\infty)$ sarebbero aperti di A , lo ricoprirebbero (perché $c \notin A$), sarebbero non vuoti perché $a \in A \cap (-\infty, c)$ e $b \in (c, +\infty)$ e sarebbero disgiunti, dunque A sarebbe sconnesso ζ □

Spazio connesso ma non connesso per archi

Lemma 2.15.5. Siano X topologico, $Z \subseteq X$ sottospazio e $A \subseteq Z$. Sia \overline{A}^Z la chiusura di A in Z (cioè la chiusura di A quando lo pensiamo come sottospazio di Z), allora $\overline{A}^Z = \overline{A} \cap Z$, dove \overline{A} è la chiusura di A in X .



Dimostrazione. Sappiamo che $\overline{A}^Z =$ "intersezione di tutti i chiusi di Z che contengono A " \implies

$$\overline{A}^Z = \bigcap_{\substack{D \text{ t.c. } A \subseteq D \subseteq Z \\ D \text{ chiuso in } Z}} D = \bigcap_{\substack{C \text{ t.c. } A \subseteq C \\ C \text{ chiuso in } X}} (Z \cap C) = Z \cap \bigcap_{\substack{C \text{ t.c. } A \subseteq C \\ C \text{ chiuso in } X}} C = Z \cap \overline{A}$$

□

Attenzione! La stessa cosa non vale per la parte interna: se $X = \mathbb{R}$ e $A = Z = \mathbb{Q}$, allora A è aperto in Z , dunque la parte interna di A come sottospazio di Z è A stesso, cioè \mathbb{Q} . Invece la parte interna di \mathbb{Q} in \mathbb{R} è \emptyset .

Altro esempio: se $X = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R} \times \{0\}$ e $A = [-1, 1] \times \{0\}$, allora la parte interna di A in Z è $(-1, 1) \times \{0\}$, mentre $\text{int}(A)$ in \mathbb{R}^2 è \emptyset .

Lemma 2.15.6. Siano X topologico e $Y, Z \subseteq X$ sottospazi tali che $Z \subseteq Y \subseteq \bar{Z}$. Se Z è connesso, allora anche Y lo è.

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto di Y . Per concludere basta vedere che $A = Y$. Osserviamo che $\bar{Z}^Y = \bar{Z} \cap Y = Y$, per cui Z è denso in Y , dunque, essendo A aperto e non vuoto di Y , $Z \cap A \neq \emptyset$. Inoltre, per definizione di topologia di sottospazio, poiché A è aperto e chiuso in Y , $Z \cap A$ è aperto e chiuso in Z . Essendo non vuoto ed essendo Z connesso, necessariamente $Z \cap A = Z$, cioè $Z \subseteq A$. Dunque $Y = \bar{Z}^Y \subseteq \bar{A}^Y = {}^{50}A \implies Y \subseteq A$ e dunque $Y = A$, come voluto. \square

Corollario 2.15.7. Sia X topologico. Se $Z \subseteq X$ è connesso, allora anche \bar{Z} è connesso.

Dimostrazione. Basta porre $Y = \bar{Z}$ nel **Lemma 2.15.6**. \square

Sia ora $Z = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ e $Y = Z \cup \{(0, 0)\}$, osserviamo che:

1. Z è connesso, in quanto è immagine del connesso $(0, +\infty)$ tramite la funzione continua

$$g: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto (x, \sin \frac{1}{x})$$

2. $(0, 0) \in \bar{Z}$, ad esempio perché $(0, 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n\pi}, 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(\frac{1}{n\pi})$, per cui $(0, 0)$ è limite di una successione a valori in Z e $(0, 0) \in \bar{Z}$.

Perciò $Y = Z \cup \{(0, 0)\} \subseteq \bar{Z}$ e quindi è connesso per il **Lemma 2.15.6**.

Proposizione 2.15.8. Lo spazio $Y = Z \cup \{(0, 0)\}$, pur essendo connesso, non è connesso per archi.

Dimostrazione. Idea: non possiamo connettere l'origine ad alcun punto di Y , tutti i cammini continui che partono da $(0, 0)$ sono costanti. Infatti, sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ cammino tale che $\gamma(0) = (0, 0)$. Diciamo che $\gamma^{-1}((0, 0))$ è aperto e chiuso in $[0, 1]$, il che implica che è tutto $[0, 1]$, cioè che γ è costante (dunque Y non è connesso per archi). Il fatto che $\gamma^{-1}((0, 0))$ sia chiuso è ovvio, perché è preimmagine di un punto che è chiuso (Y è T_1).

Per vedere che $\gamma^{-1}((0, 0))$ sia aperto, si usa la specifica geometria di Y . Sia $t_0 \in [0, 1]$ tale che $\gamma(t_0) = (0, 0)$. Poiché γ è continuo, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$, $|y(\gamma(t))| \leq \frac{1}{2}$ (indichiamo con $y(\gamma(t))$ l'ordinata di $\gamma(t)$; poiché γ è continua, la sua seconda componente è continua, per cui $y(\gamma(t_0)) = 0$, quindi, per continuità, $|y(\gamma(t))| \leq \frac{1}{2}$ in un intorno di t_0).

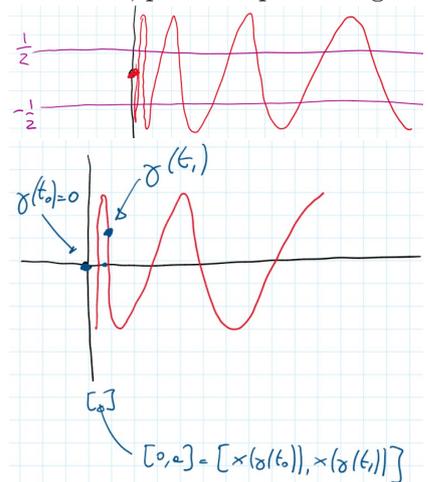
Diciamo che $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$ abbiamo $\gamma(t) = (0, 0)$, da cui la tesi.

Se così non fosse, esisterebbe $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$ tale che $\gamma(t_1) = (a, b)$, con $a > 0$. Poiché γ è continua, anche $x \circ \gamma$ (cioè la sua proiezione sull'asse x) lo è; ora $x(\gamma(t_0)) = 0$, $x(\gamma(t_1)) = a > 0$ e $[t_0, t_1]$ è connesso, per cui $x(\gamma([t_0, t_1]))$, dovendo essere un connesso di $[0, +\infty)$ che contiene sia 0 sia a , contiene tutto $[0, a]$.

Ora, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \in (0, a)$ ⁵¹ e dunque $\exists t_2 \in [t_0, t_1]$ tale che $x(\gamma(t_2)) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, cioè

$$\gamma(t_2) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \sin \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \right) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, 1 \right)$$

Abbiamo così trovato $t_2 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$ tale che $y(\gamma(t_2)) = 1 \not\leq \frac{1}{2}$ perché $|y(\gamma(t_2))| \leq \frac{1}{2}$. \square



⁵⁰Perché A è chiuso in Y .

⁵¹Basta prendere n abbastanza grande.

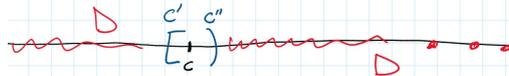
Esercizi IX settimana

Esercizio 37. Si mostri che la retta di Sorgenfrey (cioè \mathbb{R} dotato della topologia generata dai sottoinsiemi della forma $[a, b)$, con $a < b$) è uno spazio normale (cioè T_4 e T_1)⁵².

Dimostrazione. La topologia di Sorgenfrey è più fine di quella Euclidea, per cui è T_1 .

Vediamo che sia anche T_4 : siano $C, D \subseteq \mathbb{R}$ chiusi e disgiunti (ovviamente per la topologia di Sorgenfrey, che d'ora in poi sarà sottintesa).

Cerchiamo A, B aperti tali che $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ e $A \cap B = \emptyset$.



Poiché D è chiuso, $\mathbb{R} \setminus D$ è aperto, perciò, dato $c \in C \subseteq \mathbb{R} \setminus D$, esiste un aperto della base della topologia che contiene c ed è contenuto in $\mathbb{R} \setminus D$: $c \in [c', c'') \subseteq \mathbb{R} \setminus D$, con $c' \leq c < c''$.

In particolare, $c \in [c, c'')$, con $c < c''$ e $[c, c'') \cap D = \emptyset$. Ora, ripetiamo questa costruzione $\forall c \in C$ e poniamo $A = \bigcup_{c \in C} [c, c'')$. Per costruzione, $C \subseteq A$ e A è aperto⁵⁴. Procediamo analogamente per D :

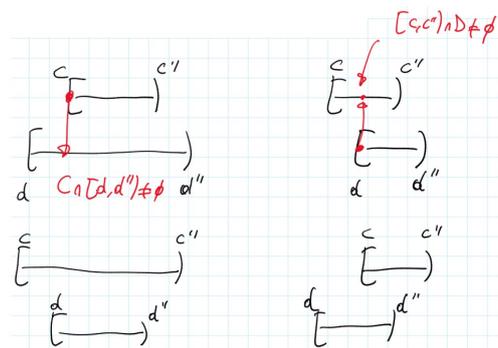
$\forall d \in D$ troviamo $d'' > d$ tale che $[d, d'') \cap C = \emptyset$ e poniamo $B = \bigcup_{d \in D} [d, d'')$ che è aperto e contiene D .

Dobbiamo verificare che $A \cap B = \emptyset$, cioè che

$$\left(\bigcup_{c \in C} [c, c'') \right) \cap \left(\bigcup_{d \in D} [d, d'') \right) = \emptyset$$

Se non fosse così, $\exists c \in C$ e $d \in D$ tali che $[c, c'') \cap [d, d'') \neq \emptyset$.

In ciascuna delle quattro configurazioni possibili si giunge a un assurdo, in quanto $[c, c'') \cap D = \emptyset$ e $[d, d'') \cap C = \emptyset$ mentre $c \in C$ e $d \in D$.



□

Esercizio 39 (Parte dell'esercizio).

Sia τ la topologia su \mathbb{R} generata dagli aperti Euclidei e da $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, allora τ è T_2 in quanto più fine della topologia Euclidea ma non è T_3 .

Dimostrazione. Prendiamo come chiusi $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ e $D = \{0\}$. Osserviamo che una base della topologia τ è data da $\{A \mid A \text{ aperto Euclideo}\} \cup \{A \setminus C \mid A \text{ aperto Euclideo}\}$, in quanto intersezioni finite di aperti Euclidei con $\mathbb{R} \setminus C$ danno esattamente questi due tipi di insiemi. Usando questo fatto, si vede che un qualsiasi aperto B tale che $D \subseteq B$ (cioè $0 \in B$) contiene un insieme della forma $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C$. Inoltre, non è difficile caratterizzare gli aperti che contengono C : se $\frac{1}{n} < \varepsilon$, allora un tale aperto deve contenere un insieme del tipo $(\frac{1}{n} - \varepsilon', \frac{1}{n} + \varepsilon')$ tale che $(\frac{1}{n} - \varepsilon', \frac{1}{n} + \varepsilon') \cap ((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C) \neq \emptyset$, per cui necessariamente $A \cap B \neq \emptyset$. □

⁵²Questo dà un esempio di spazio normale non metrizzabile, già visto anche nell'**Esempio 20 (Retta di Sorgenfrey)**.

⁵³ $C \cap D = \emptyset$.

⁵⁴Unione di aperti.

2.16 Componenti connesse e connesse per archi

Lemma 2.16.1. *Siano X uno spazio topologico e $Y_i \subseteq X$, con $i \in I$, sottospazi connessi. Se $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$, allora $\bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq X$ è connessa.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in \bigcap_{i \in I} Y_i$ ($\neq \emptyset$ per ipotesi). Per verificare che $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è connessa, consideriamo $A \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$ aperto e chiuso. A meno di passare al complementare⁵⁵ di A in $\bigcup_{i \in I} Y_i$, possiamo supporre che $x_0 \in A$. Consideriamo $A \cap Y_i \subseteq Y_i$, con $i \in I$. Questo è aperto e chiuso in Y_i , è non vuoto (contiene x_0) e Y_i è connesso per ipotesi. Segue che $A \cap Y_i = Y_i \forall i \in I \implies A = \bigcup_{i \in I} Y_i$. Questo mostra che $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è connessa. \square

Definizione 2.16.1. *Dato $x_0 \in X$, la sua **componente connessa** in X (la denotiamo con $C(x_0)$) è il più grande sottospazio connesso di X che contiene x_0 .*

Proposizione 2.16.2. *Questa definizione è ben posta.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\{x_0\}$ è connesso $\implies A = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ connesso e } x_0 \in Y\} \neq \emptyset$. Sia $U = \bigcup_{Y \in A} Y$. Questo sottospazio di X è connesso per il **Lemma 2.16.1**, in quanto ogni $Y \in A$ è connesso, e $\bigcap_{Y \in A} Y \neq \emptyset$ (contiene almeno x_0). Inoltre U contiene (per costruzione) qualsiasi connesso che contenga x_0 . \square

Proposizione 2.16.3. *Se X è uno spazio topologico e $x_0 \in X$, allora $C(x_0)$ è un chiuso di X .*

Dimostrazione. Visto che $C(x_0)$ è connesso, segue che (visto in precedenza) anche $\overline{C(x_0)}$ è connesso. Dato che $x_0 \in \overline{C(x_0)}$ e $C(x_0)$ è il sottospazio connesso più grande di X che contiene x_0 , segue che $\overline{C(x_0)} \subseteq C(x_0)$, dunque $\overline{C(x_0)} = C(x_0)$ e cioè $C(x_0)$ è chiuso. \square

Osservazione 56. $\{C(x)\}_{x \in X}$ è una partizione di X , cioè

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x) \text{ e, se } C(x) \cap C(y) \neq \emptyset, \text{ allora } C(x) = C(y)$$

Infatti, $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$ è chiaro e, se $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, allora, dal **Lemma 2.16.1**, $C(x) \cup C(y)$ è

connesso e quindi dobbiamo avere $\begin{cases} C(x) = C(x) \cup C(y) \\ C(y) = C(x) \cup C(y) \end{cases} \implies C(x) = C(y)$.

Conseguenza: se X ha un numero finito di componenti connesse, segue che queste sono anche aperti di X . Infatti, $X \setminus C(x) = \bigcup_{y \notin C(x)} C(y)$ (è un chiuso perché unione finita di chiusi) $\implies C(x)$ è aperto.

Questo però non succede sempre:

Esempio 39. *Le componenti connesse di \mathbb{Q} (visto come sottospazio di \mathbb{R}) sono i singoletti, quindi non sono aperte e non sono in numero finito.*

Infatti, fissato $q \in \mathbb{Q}$, sicuramente $\{q\}$ è connesso. Supponiamo, per assurdo, che $\exists q' \in \mathbb{Q}$ tale che $q' \in C(q)$ e, senza perdita di generalità, supponiamo che $q' < q$. Sia $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $q' < r < q$. Consideriamo $U = (-\infty, r) \cap \mathbb{Q}$ e $V = (r, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Questi sono aperti e chiusi in \mathbb{Q} : aperti in quanto restrizione di aperti di \mathbb{R} , chiusi in quanto ad esempio $U = (-\infty, r) \cap \mathbb{Q} = (-\infty, r] \cap \mathbb{Q}$ ⁵⁶. I sottoinsiemi $U \cap C(q)$ e $V \cap C(q)$ di $C(q)$ sono entrambi aperti, chiusi e non vuoti, visto che $q' \in U \cap C(q)$ e $q \in V \cap C(q)$. Questo dà una contraddizione con il fatto che $C(q)$ è connesso.

Definizione 2.16.2. *Uno spazio topologico X si dice **totalmente sconnesso**, se $C(x) = \{x\} \forall x \in X$.*

⁵⁵Pure aperto e chiuso.

⁵⁶Visto che $r \notin \mathbb{Q}$.

Abbiamo visto che \mathbb{Q} è totalmente sconnesso.

Facciamo la stessa cosa per la connessione per archi.

Diciamo che $x, y \in X$ sono equivalenti, e scriviamo $x \sim y$, se $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ cammino tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ (“ x e y sono collegati da un cammino”).

Questa è una relazione di equivalenza:

- $x \sim x$: usando il cammino costante in x ;
- se $x \sim y \implies y \sim x$: se $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ è tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, consideriamo $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$: è un cammino (composizione di funzioni continue), $\bar{\gamma}(0) = \gamma(1) = y$ e $\bar{\gamma}(1) = \gamma(0) = x$ (“stesso cammino percorso al contrario”);
- se $x \sim y$ e $y \sim z \implies x \sim z$: si usa la giunzione dei due cammini da x a y e da y a z .

Definizione 2.16.3. La **componente connessa per archi** (C.C.P.A.) di $x_0 \in X$ (la denotiamo con $A(x_0)$) è la classe di equivalenza di x_0 rispetto a questa relazione (cioè il sottoinsieme di X dei punti che possono essere collegati a x_0 tramite un cammino).

Osservazione 57. Le C.C.P.A. di X formano una partizione di X (chiaro per costruzione) e la C.C.P.A. di x_0 è il più grande sottoinsieme connesso per archi di X che contiene x_0 .

In generale, le C.C.P.A. non sono né aperte né chiuse.

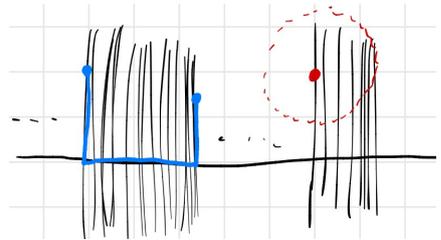
Esempio 40. $X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abbiamo visto che è connesso ma non è connesso per archi. Effettivamente le C.C.P.A. sono

$$\{(0, 0)\}^{57} \text{ e } \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid x > 0 \right\}^{58}$$

$\{(0, 0)\}$ è chiuso ma non aperto e $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ è aperto ma non chiuso.

Definizione 2.16.4. Uno spazio topologico X è **localmente connesso** (rispettivamente, **localmente connesso per archi**), se $\forall x \in X$ esiste un S.F.I. di x costituito da intorni connessi (rispettivamente, connessi per archi).

Esempio 41 (Pettine infinito). $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ è connesso per archi (quindi connesso), ma non è localmente connesso (formalizzare per **Esercizio**).



Idea: gli intorni di un S.F.I. devono entrare dentro qualsiasi palla aperta e (per i punti non sull'asse x), se ne prendiamo una che non interseca l'asse x , non potremo avere un intorno connesso contenuto dentro questa palla.

Proposizione 2.16.4. Se X è localmente connesso per archi, allora le C.C.P.A. sono aperte e coincidono con le componenti connesse.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$. Verifichiamo che $A(x_0)$ è un aperto, mostrando che è intorno di ogni suo punto. Se $x \in A(x_0)$, allora $\exists U$ intorno di x che è connesso per archi.

$U \subseteq A(x_0)$, infatti: se $z \in U$, visto che U è connesso per archi, allora $z \sim x$ e inoltre abbiamo $x \sim x_0$, dato che $x \in A(x_0)$. Segue che $z \sim x_0 \implies z \in A(x_0)$. Dunque $A(x_0)$ è un intorno di x e $A(x_0)$ è aperto. Da ciò segue inoltre che $A(x_0)$ è anche chiuso, poiché $X \setminus A(x_0) = \bigcup_{y \notin A(x_0)} A(y)$ è unione di

aperti. Mostriamo ora che $A(x_0) = C(x_0)$.

(Nota: in questa parte useremo solo il fatto che $A(x)$ è aperto (e chiuso) $\forall x \in X$.)

$A(x_0)$ è connesso per archi $\implies A(x_0)$ è connesso e contiene x_0 , quindi $A(x_0) \subseteq C(x_0)$. Inoltre, visto che $A(x_0)$ è aperto e chiuso in X , avremo che $A(x_0) \cap C(x_0) \subseteq C(x_0)$ è aperto e chiuso.

È non vuoto perché contiene x_0 e, per connessione di $C(x_0)$, segue che $A(x_0) \cap C(x_0) = C(x_0)$, cioè $C(x_0) \subseteq A(x_0)$. Combinando le due inclusioni abbiamo la tesi. \square

⁵⁷Visto che non può essere collegato a nessun altro punto in X .

⁵⁸È connesso per archi in quanto immagine di $(0, +\infty)$ tramite la funzione continua $x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x})$.

Corollario 2.16.5. *Se X è localmente connesso per archi e $U \subseteq X$ è un aperto, allora U è connesso se e solo se è connesso per archi.*

Dimostrazione. Osserviamo che U è localmente connesso per archi: infatti, fissato $x \in U$, vediamo che gli intorni di x in U , che sono connessi per archi, formano un S.F.I.

Sia V un intorno di x in U . Questo V è anche un intorno di x in X , quindi, visto che X è localmente connesso per archi, abbiamo W intorno di x in X connesso per archi tale che $W \subseteq V$. Questo $W \subseteq U$ è un intorno di x in U connesso per archi e $W \subseteq V$.

Ora, se U è connesso per archi, allora è connesso (sempre vera) e inoltre $U = C(x_0)$ qualsiasi sia $x_0 \in U$. Per la **Proposizione 2.16.4**, visto che U è localmente connesso per archi, segue che $C(x_0) = A(x_0)$, dunque otteniamo che $U = A(x_0)$ e quindi U è connesso per archi. \square

Ciò si applica in particolare agli aperti di \mathbb{R}^n (che è chiaramente localmente connesso per archi).

Esempio 42 (~Esercizio). • $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è connesso;

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, con $n \geq 2$, è connesso per archi;
- $\mathbb{R}^n \setminus S$, con $n \geq 2$ e $|S| \leq |\mathbb{N}|$, è connesso per archi.

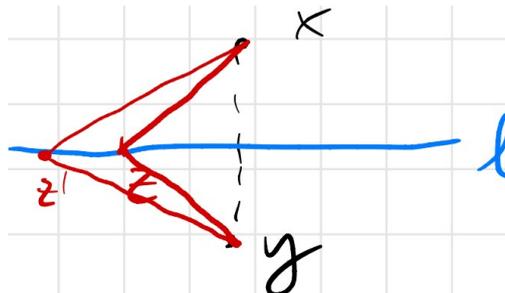
Sketch della Dimostrazione. Siano $x \neq y \in \mathbb{R}^n \setminus S$ e li vogliamo collegare con un arco. Ci restringiamo a un piano P che contiene x e y e li connettiamo con un arco contenuto in P .

Consideriamo $\ell =$ asse del segmento \overline{xy} e per $z \in \ell$ il cammino γ_z in disegno (giunzione di 2 segmenti). Osserviamo che $\text{Imm } \gamma_z \cap \text{Imm } \gamma_{z'} = \{x, y\}$. Possiamo considerare

$$S_0 = \{s \in S \mid \exists z \in \ell \text{ tale che } s \in \text{Imm } \gamma_z\}$$

e definire la funzione

$$S_0 \longrightarrow \ell$$

$$s \longmapsto \text{l'unico } z \in \ell \text{ tale che } s \in \text{Imm } \gamma_z$$


Se per assurdo questa funzione fosse suriettiva, seguirebbe che $|\mathbb{N}| = |S| \geq |S_0| \geq |\ell| = |\mathbb{R}| \not\leq$ \square

Conseguenza: \mathbb{R} non è omeomorfo a \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$ ⁵⁹.

Infatti, se per assurdo avessimo un omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, allora questo si restringerebbe a un omeomorfismo $\varphi|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}$ e questo è assurdo perché il dominio è sconnesso mentre il codominio no ⁶⁰.

Osservazione 58. *Tutte le proprietà “topologiche” che stiamo studiando sono invarianti per omeomorfismo: se X e Y sono omeomorfi, X ha una di queste proprietà se e solo se ce l’ha Y .*

Proposizione 2.16.6. *Se X e Y sono spazi topologici connessi, allora $X \times Y$ è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere $A, B \subseteq X \times Y$ aperti, non vuoti e tali che $A \cup B = X \times Y$: vogliamo mostrare che $A \cap B \neq \emptyset$.

Osserviamo che $\pi_X(A) \cup \pi_X(B) = X$ ($\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ proiezione):

(\supseteq) sia $x \in X$ e prendiamo $y_0 \in Y$ a caso, allora (x, y_0) sta in A oppure sta in B .
 $\implies x \in \pi_X(A)$ $\implies x \in \pi_X(B)$

(\subseteq) ovvio.

Inoltre $\pi_X(A)$ e $\pi_X(B)$ sono aperti non vuoti $\implies \pi_X(A) \cap \pi_X(B) \neq \emptyset$, per connessione di X ⁶¹.

Fissiamo $x_0 \in \pi_X(A) \cap \pi_X(B)$ e consideriamo $Y \cong \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ (con la topologia di sottospazio).

⁵⁹È anche vero che \mathbb{R}^n non è omeomorfo a \mathbb{R}^m se $n \neq m$, ma servono strumenti più avanzati.

⁶⁰L’essere connesso è invariante per omeomorfismo.

⁶¹Se $\pi_X(A) \cap \pi_X(B) = \emptyset$, seguirebbe che sono anche chiusi, visto che sarebbero complementari.

Siano $A' = (\{x_0\} \times Y) \cap A$ e $B' = (\{x_0\} \times Y) \cap B$. Sono due aperti, si ha $A' \cup B' = \{x_0\} \times Y$ e sono non vuoti ⁶². Per connessione di Y , segue che $A' \cap B' \neq \emptyset$ e quindi

$$\left((\{x_0\} \times Y) \cap A \right) \cap \left((\{x_0\} \times Y) \cap B \right) = (\{x_0\} \times Y) \cap (A \cap B) \neq \emptyset \implies A \cap B \neq \emptyset$$

come volevamo dimostrare. □

Fatto 2.16.7 (~Esercizio). • Se X_i sono spazi connessi, con $i \in I$, allora $\prod_{i \in I} X_i$ è pure connesso.

- Se X e Y sono connessi per archi, allora $X \times Y$ è connesso per archi.
- Se X_i sono spazi connessi per archi, con $i \in I$, allora $\prod_{i \in I} X_i$ è pure connesso per archi.

Dato uno spazio topologico X , definiamo

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\} = X/\sim$$

dove $x \sim y$ se sono collegati da un cammino.

Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua, abbiamo una funzione di insiemi $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ e la funzione indotta $\begin{array}{ccc} X/\sim & \rightarrow & Y/\sim \\ [x] & \mapsto & [f(x)] \end{array}$ da f passando al quoziente (è ben definita, perché, se $x \sim y$ in X , cioè $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, allora $f(x) \sim f(y)$ in Y tramite il cammino $f \circ \gamma$). Inoltre:

- $\pi_0(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\pi_0(X)}$;
- se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono continue, allora $\pi_0(X) \xrightarrow{\pi_0(f)} \pi_0(Y) \xrightarrow{\pi_0(g)} \pi_0(Z)$ si ha $\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g \circ f)$ ⁶³.

Si dice che π_0 è un **funttore** dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli insiemi

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 : & Top & \longrightarrow & Set \\ & X & \longmapsto & \pi_0(X) \\ & f : X \rightarrow Y & \longmapsto & \pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y) \end{array}$$

Conseguenza: se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ è una bigezione. Infatti, se $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è l'inversa,

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y : Y \rightarrow Y \implies \pi_0(f) \circ \pi_0(f^{-1}) = \pi_0(f \circ f^{-1}) = \pi_0(\text{Id}_Y) = \text{Id}_{\pi_0(Y)}$$

Stessa cosa, da $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X : X \rightarrow X$, troviamo che $\pi_0(f^{-1}) \circ \pi_0(f) = \text{Id}_{\pi_0(X)}$. Da questo segue che $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ è invertibile (e l'inversa è $\pi_0(f^{-1})$).

Corollario 2.16.8. Se X e Y sono spazi topologici e $|\pi_0(X)| \neq |\pi_0(Y)|$, allora X e Y non sono omeomorfi.

Osservazione 59. Ovviamente non è vero il viceversa! Se $|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)|$, non è detto che X e Y siano omeomorfi: ad esempio, se prendiamo $X = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia di sottospazio, sono entrambi totalmente sconnessi e $|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)| = |\mathbb{N}|$, ma X e Y non sono omeomorfi ⁶⁴.

⁶²Infatti, se $A' = \emptyset$, seguirebbe che $(\{x_0\} \times Y) \cap A = \emptyset$ e quindi $x_0 \notin \pi_X(A)$, che contraddirebbe la scelta di x_0 .

⁶³Se $[x] \in \pi_0(X)$, allora $\pi_0(g \circ f)[x] = [(g \circ f)(x)]$, $\pi_0(f)[x] = [f(x)]$ e $\pi_0(g)[f(x)] = [g(f(x))]$.

⁶⁴ \mathbb{Q} non ha la topologia discreta!

2.17 Compattezza

Definizione 2.17.1. X topologico si dice **compatto**, se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ammette un sottoricoprimento finito ⁶⁵.

Esempio 43. \mathbb{R}^n non è compatto.

Infatti, fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\{B(x_0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto, ma non ammette un sottoricoprimento finito.

Osservazione 60. Se (X, d) è uno spazio metrico e (X, τ_d) è compatto, allora d è limitata ⁶⁶.

Infatti, fissato $x_0 \in X$, il ricoprimento aperto $\{B(x_0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette un sottoricoprimento finito, quindi $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $B(x_0, N) = X$, cioè $d(x_0, x) < N \forall x \in X$.
Segue che $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2N \forall x, y \in X$.

Osservazione 61. Non vale il viceversa, cioè non è detto che, se d è limitata, allora (X, τ_d) è compatto (abbiamo visto tempo fa che qualsiasi distanza è topologicamente equivalente a una distanza limitata).

Esempio 44. Se X è uno spazio topologico finito, allora è compatto.

Infatti, basta prendere un aperto per ciascun punto.

Proposizione 2.17.1. Lo spazio $[0, 1]$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$.

Sia $A = \{t \in [0, 1] \mid [0, t] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \text{ per qualche } J \subseteq I \text{ finito}\}$: vogliamo mostrare che $1 \in A$.

- $0 \in A$ (perché \mathcal{U} è un ricoprimento) e $A \neq \{0\}$: infatti, $\exists i_0 \in I$ tale che $0 \in U_{i_0}$ e, dato che U_{i_0} è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $[0, \varepsilon] \subseteq U_{i_0}$. Osserviamo che $[0, \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq [0, \varepsilon] \subseteq U_{i_0} \implies \frac{\varepsilon}{2} \in A$.
- A è un intervallo, cioè se $a \in A$, allora $[0, a] \subseteq A$: se $0 \leq a' \leq a$, allora $[0, a'] \subseteq [0, a]$ e dunque $a' \in A$, visto che $[0, a]$ può essere coperto da un numero finito di U_i .
- Sia $s = \sup A$. Osserviamo che $[0, s) \subseteq A$: infatti, se $0 \leq a < s$, allora, per definizione di sup, $\exists a' \in A$ tale che $a \leq a' \leq s$. Visto che A è un intervallo, abbiamo $a \in [0, a'] \subseteq A \implies a \in A$.
- $s \in A$: infatti, visto che \mathcal{U} è un ricoprimento, $\exists i_0 \in I$ tale che $s \in U_{i_0}$.

Dato che U_{i_0} è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$.

Ora osserviamo che, per quanto visto, $s - \frac{\varepsilon}{2} \in A$, quindi $\exists J \subseteq I$ finito tale che $[0, s - \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$.

Aggiungendo U_{i_0} a questa famiglia finita (se non c'è già), otteniamo che

$$[0, s] \subseteq \left(\bigcup_{i \in J} U_i \right) \cup U_{i_0} \implies s \in A$$

- $s = 1$: infatti, se per assurdo $s \neq 1$, il ragionamento appena fatto mostra che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $s + \frac{\varepsilon}{2} \in A$ e questo contraddice il fatto che $s = \sup A$.

□

Teorema 2.17.2. Sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Se X è compatto, allora $f(X)$ è compatto.

Slogan: "Funzioni continue portano compatti in compatti"

⁶⁵ Cioè $\exists J \subseteq I$ finito tale che $\bigcup_{i \in J} U_i = X$.

⁶⁶ Cioè $\exists R > 0$ tale che $d(x, y) < R \forall x, y \in X$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Poiché $f : X \rightarrow f(X)$ è continua, $f^{-1}(U_i)$ è aperto in $X \forall i \in I$. Inoltre

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = f^{-1}(f(X)) = X$$

per cui $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X . Per compattezza di X , $\exists J \subseteq I$ fissato tale che $X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$. Abbiamo $f(X) = f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i \in J} U_i$ perciò abbiamo trovato il sottoricoprimento finito di $f(X)$ cercato. \square

Corollario 2.17.3. *Se X e Y sono omeomorfi, X è compatto $\iff Y$ è compatto.*

Osservazione 62. *Visto che la compattezza è invariante per omeomorfismo, abbiamo che*

- $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, con $a < b$, sono compatti, perché sono omeomorfi a $[0, 1]$.
- $(-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ non è compatto, ad esempio in quanto omeomorfo a \mathbb{R} tramite la funzione

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$$

Segue che (a, b) , con $a < b$, non sono compatti, perché sono omeomorfi a $(-1, 1)$.

- $[0, 1)$ non è compatto, perché è omeomorfo a $[0, +\infty)$ (tramite la f sopra), quindi anche $[a, b)$ e $(a, b]$, con $a < b$, non sono compatti.

Definizione 2.17.2. *Diciamo che una famiglia di sottoinsiemi $\{Y_i\}_{i \in I}$ di un insieme X ha la **proprietà dell'intersezione finita**, se $\forall J \subseteq I$ finito fissato si ha $\bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset$.*

Esempio 45. $X = \mathbb{R}$ e $Y_i = [i, +\infty)$, con $i \in \mathbb{N}$:

$\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, però $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i = \emptyset$.

Esempio 46. $X = \mathbb{R}$ e $Y_n = (0, \frac{1}{n})$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$:

$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, ma $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} Y_n = \emptyset$.

Teorema 2.17.4. *Sia X topologico. X è compatto $\iff \forall \{C_i\}_{i \in I}$ famiglia di chiusi che goda della proprietà dell'intersezione finita si ha $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. (\implies) Sia $\{C_i\}_{i \in I}$ che gode della proprietà dell'intersezione finita, con C_i chiuso $\forall i \in I$. Per assurdo, supponiamo $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$. Posto $A_i = X \setminus C_i$, si ha che A_i è aperto e, poiché $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Per compattezza, $\exists A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ tali che $X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$, ma allora $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n} = \emptyset$, contro l'ipotesi.

(\impliedby) Analogamente, supponendo che valga la proprietà data nell'enunciato e preso un ricoprimento aperto $\{A_i\}_{i \in I}$, consideriamo $C_i = X \setminus A_i \forall i \in I$. Se il ricoprimento aperto non ammette sottoricoprimenti finiti, allora $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, contro il fatto che gli A_i ricoprono X . \square

Corollario 2.17.5. *Se X è compatto e C_n , con $n \in \mathbb{N}$, è una successione di chiusi non vuoti di X tali che $C_{n+1} \subseteq C_n \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.*

(Abbiamo visto sopra, con gli esempi di $Y_i = [i, +\infty)$ e $Y_n = (0, \frac{1}{n})$, che sia la compattezza di X che la chiusura dei C_n sono fondamentali affinché valga il **Corollario 2.17.5**.)

⁶⁷Vero in quanto $U_i \subseteq f(X)$, per cui $f(f^{-1}(U_i)) = U_i$.

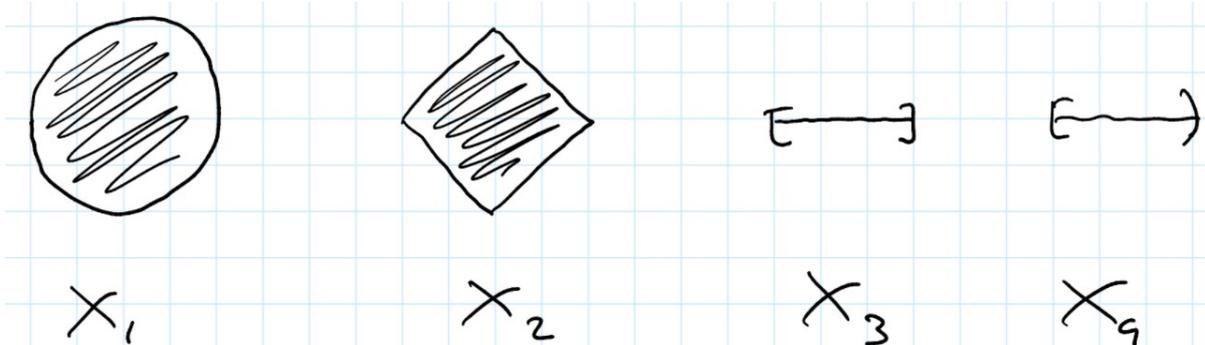
Esercizi X settimana

Esercizio 40. Per i seguenti spazi, si dica se X_i sia omeomorfo a X_j al variare di $i, j = 1, 2, 3, 4$.

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\},$$

$$X_3 = [0, 1], \quad X_4 = [0, 1).$$

(Suggerimento: può essere utile verificare per quali $Q \in X_i$ si ha $X_i \setminus \{Q\}$ connesso.)



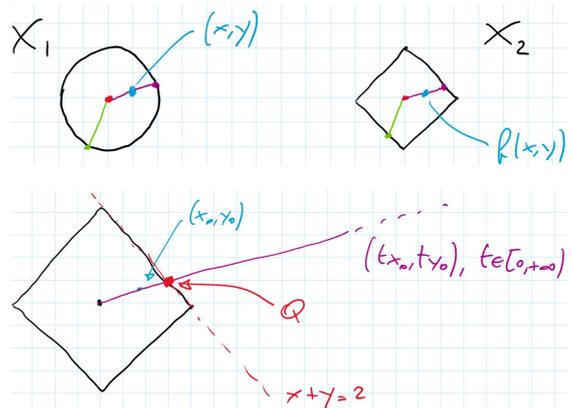
Fatto 2.17.6. Dati X, Y omeomorfi, X è connesso $\iff Y$ è connesso⁶⁸. Inoltre, come già detto, se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo e $Z \subseteq X$, allora $f|_Z : Z \rightarrow f(Z)$ è un omeomorfismo (lo applicheremo al caso $Z = X \setminus \{P\}$).

Dimostrazione. (**Esercizio 40**) ① X_1 è omeomorfo a X_2 .

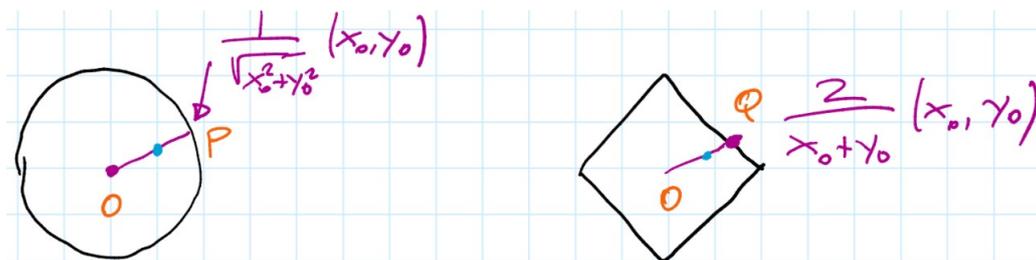
Come si scrive un omeomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$?

Costruiamo f "riscalando" opportunamente i segmenti uscenti dall'origine. Dato $(x_0, y_0) \in X_1$, vogliamo capire chi sia il punto finale del segmento tra $O = f(O)$ e $f(x_0, y_0)$. Supponiamo, senza perdita di generalità, $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$; cerchiamo il punto di intersezione tra la semiretta (tx_0, ty_0) , con $t \in [0, +\infty)$, e la retta $x + y = 2$ (che contiene il bordo del rombo nel primo quadrante): otteniamo $tx_0 + ty_0 = 2$, cioè $t = \frac{2}{x_0 + y_0}$, dunque

$$Q = \frac{2}{x_0 + y_0}(x_0, y_0)$$



Perciò, riscalando linearmente il segmento uscente da O in X_1 su quello in X_2 , si ha



Dunque

$$f(x_0, y_0) = \frac{2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x_0 + y_0}(x_0, y_0)$$

dove $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \overline{OQ} = \frac{2}{x_0 + y_0} \|(x_0, y_0)\| = \frac{2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x_0 + y_0}$ è il **fattore di riscalda**.
Ragionando analogamente sugli altri quadranti, otteniamo

$$f(x_0, y_0) = \begin{cases} O & \text{se } (x_0, y_0) = (0, 0) \\ \frac{2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{|x_0| + |y_0|}(x_0, y_0) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

⁶⁸Ovvio: funzioni continue portano connessi in connessi.

Per costruzione è bigettiva.

Dobbiamo vedere che sia continua: lo facciamo “all’antica”, cioè osservando che f è continua su $X_1 \setminus \{O\}$ (perché le sue componenti $\frac{2x_0\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{|x_0|+|y_0|}$ e $\frac{2y_0\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{|x_0|+|y_0|}$ sono continue su $X_1 \setminus \{O\}$) ed è continua anche in O , ad esempio, perché $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq |\alpha| + |\beta|$ (basta confrontare i quadrati) per cui, se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora $\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{|x_0|+|y_0|} \leq 1$, da cui

$$\left\| \frac{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{|x_0|+|y_0|}(x_0, y_0) \right\| = 2 \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{|x_0|+|y_0|}}_{\leq 1} \|(x_0, y_0)\| \leq 2 \cdot \|(x_0, y_0)\|$$

Dunque $f(O) = O$ e $\forall P \in X_1 \setminus \{O\}, \|f(P)\| \leq 2 \cdot \|P\|$.

Questo mostra che $\forall \varepsilon > 0 f(B(0, \frac{\varepsilon}{2})) \subseteq B(0, \varepsilon)$ e dunque f è continua anche in O .

Resta da vedere che anche f^{-1} sia continua. Si può fare in due modi: sfruttando un teorema che faremo tra poco ⁶⁹ oppure osservando che

$$f^{-1}(x_0, y_0) = \begin{cases} O & \text{se } (x_0, y_0) = (0, 0) \\ \frac{|x_0|+|y_0|}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(x_0, y_0) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e ragionando come sopra (separando la continuità fuori da O e in O).

② X_1 non è omeomorfo a X_3 .

In X_3 , ad esempio, il punto $\frac{1}{2}$ sconnette, cioè $X_3 \setminus \{\frac{1}{2}\} = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ è sconnesso (non è un intervallo!). Dunque $\exists P \in X_3$ tale che $X_3 \setminus \{P\}$ è sconnesso. Se $\exists f : X_3 \rightarrow X_1$ omeomorfismo, allora $X_3 \setminus \{P\}$ sarebbe omeomorfo a $f(X_3 \setminus \{P\}) = f(X_3) \setminus f(\{P\}) = X_1 \setminus \{Q\}$, cioè $\exists Q \in X_1$ tale che $X_1 \setminus \{Q\}$ è sconnesso, ma $\forall Q \in X_1 X_1 \setminus \{Q\}$ è connesso per archi e dunque connesso ⁷⁰.

③ X_1 non è omeomorfo a X_4 .

Si mostra analogamente al ②.

④ X_3 non è omeomorfo a X_4 .

Osserviamo che, dato $f : X_3 \rightarrow X_4$ omeomorfismo, $X_3 \setminus \{P\}$ è connesso $\iff X_4 \setminus \{f(P)\}$ è connesso, in quanto $X_3 \setminus \{P\}$ e $X_4 \setminus \{f(P)\}$ sono omeomorfi. Dunque f si restringe a una bigezione tra i punti che non sconnettono X_3 e quelli che non sconnettono X_4 , ma i punti che non sconnettono X_3 sono $\{0\}$ e $\{1\}$ ⁷¹, mentre l’unico punto che non sconnette X_4 è $\{0\}$. Perciò X_3 non è omeomorfo a X_4 . Saremmo potuti arrivare alla stessa conclusione osservando che X_3 è compatto mentre X_4 non lo è (vedasi sotto). \square

Esercizio 41. (4) Si mostri che S^1 non è omeomorfo ad alcun sottoinsieme di \mathbb{R} .

Dimostrazione. (4.) Supponiamo che, per assurdo, $\exists A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \cong S^1$, perciò, essendo in bigezione con S^1 , A conterrebbe infiniti punti. In particolare $\exists x_1, x_2, x_3 \in A$ tali che $x_1 < x_2 < x_3$, ma allora $A \setminus \{x_2\} = (A \cap (-\infty, x_2)) \cup (A \cap (x_2, +\infty))$ fornirebbe una partizione di $A \setminus \{x_2\}$ in aperti non vuoti ⁷², per cui $A \setminus \{x_2\}$ sarebbe sconnesso. Essendo A omeomorfo a S^1 , $A \setminus \{x_2\}$ sarebbe omeomorfo a $S^1 \setminus \{P\}$ per qualche $P \in S^1$, ma $S^1 \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}$ che è connesso, dunque $A \setminus \{x_2\}$ dovrebbe essere anche connesso ζ \square

⁶⁹Se X_1 è compatto e X_2 è T_2 , allora f è chiusa e quindi f^{-1} è continua.

⁷⁰Se $\|Q\| = 1$, allora $X_1 \setminus \{Q\}$ è addirittura convesso, per cui due suoi punti sono connessi dal segmento che li unisce; altrimenti, dati $Q', Q'' \in X_1 \setminus \{Q\}$, troviamo comunque un arco in X_1 che li connette evitando Q .

⁷¹Ricordiamo che i connessi di \mathbb{R} sono tutti e soli gli intervalli.

⁷²Come minimo, $x_1 \in A \cap (-\infty, x_2)$ e $x_3 \in A \cap (x_2, +\infty)$.

2.18 Sottospazi

Osservazione 63. $Y \subseteq X$ è compatto $\iff \forall \{U_i\}_{i \in I}$ famiglia di aperti di X tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$,
 $\exists J \subseteq I$ finito tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$.

(Discende immediatamente dalla definizione di compatto e di aperto nella topologia di sottospazio.)

Osservazione 64. $[0, 1]$ è compatto ma $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0, 1]$ non lo è, dunque i sottospazi di un compatto, in generale, non sono compatti.

Teorema 2.18.1. Sia X compatto. Se $C \subseteq X$ è chiuso, allora C è compatto.

Slogan: "Chiuso in un compatto è compatto"

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X tale che $C \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.  C
 Aggiungendo $V = X \setminus C$ aperto, otteniamo il ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{V\}$ aperto di X (è un ricoprimento perché gli U_i coprono C e V copre tutto il resto). Per compattezza di X , $\exists J \subseteq I$ finito tale che $X = \bigcup_{i \in J} U_i \cup V$ ⁷³, ma $V \cap C = \emptyset$, dunque $C \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$. Dunque C è compatto. \square

Domanda: se X è topologico e $K \subseteq X$ è compatto, allora K è necessariamente chiuso?

Risposta: in generale no. Ad esempio, se X contiene almeno 2 punti e ha la topologia indiscreta, allora ogni suo sottospazio è compatto, ma nessun sottospazio (eccetto \emptyset e X) è chiuso.

Esempio meno banale: \mathbb{N} con la topologia cofinita.

Anche qui, ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ è compatto: $A = \emptyset$ è ovvio; altrimenti, se $A = \bigcup_{i \in I} U_i$, con U_i aperti $\forall i \in I$, allora

$\exists i_0$ tale che $A \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Per definizione di topologia cofinita, $|\mathbb{N} \setminus U_{i_0}| < +\infty$, perciò $|A \setminus U_{i_0}| < +\infty$, per cui $A \setminus U_{i_0} = \{a_1, \dots, a_k\}$. $\forall j = 1, \dots, k \exists i_j \in I$ tale che $a_j \in U_{i_j}$ ⁷⁴, dunque $A \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$, ma, ad esempio, $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ non è chiuso.

⁷³ V può esserci o non esserci.

⁷⁴Perché gli U_i ricoprono A .

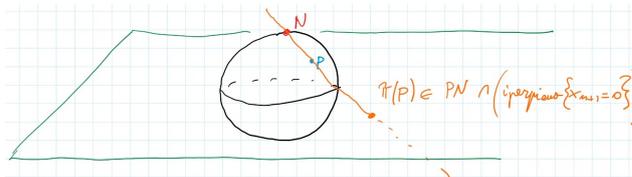
2.19 Proiezione stereografica

Definizione 2.19.1. La sfera n -dimensionale $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

Ad esempio, S^1 è la circonferenza in \mathbb{R}^2 e S^2 è la superficie sferica usuale in \mathbb{R}^3 .

Notazione: poniamo $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ e lo chiamiamo **Polo Nord**.

Definizione 2.19.2. La **proiezione stereografica** è la mappa $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ che associa ad ogni $P \in S^n \setminus \{N\}$ il punto di intersezione tra la retta passante per N e per P e l'iperpiano $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, che viene identificato con \mathbb{R}^n .



Verifichiamo che è ben definita e continua: sia $P = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (\bar{x}, x_{n+1})$.

La retta passante per N e per P è parametrizzata da $\varphi : t \mapsto tP + (1-t)N$, con $t \in \mathbb{R}$, cioè

$$\varphi : t \mapsto t(\bar{x}, x_{n+1}) + (1-t)(0, \dots, 0, 1) = (t\bar{x}, tx_{n+1} + 1 - t)$$

$$\varphi(t) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \iff tx_{n+1} + 1 - t = 0 \iff t(x_{n+1} - 1) = -1 \iff t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$$

(notiamo che $x_{n+1} \neq 1$, perché l'unico punto di S^n con l'ultima coordinata uguale a 1 è proprio N che abbiamo escluso dal dominio).

Perciò $\pi(P) = (t\bar{x}, tx_{n+1} + 1 - t)$, con $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$, cioè $\pi(P) = \left(\frac{\bar{x}}{1 - x_{n+1}}, 0\right)$.

Identificando $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ con \mathbb{R}^n , otteniamo infine

$$\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

le cui componenti sono continue e perciò è continua.

Teorema 2.19.1. $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo.

Dimostrazione. Basta costruire un'inversa continua e, a tale scopo, è sufficiente invertire la costruzione vista sopra. Dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, prendiamo la retta che connette $(x, 0)$ con N e la intersechiamo con S^n per ottenere $g(x) \in S^n \setminus \{N\}$.

Per costruzione, g è l'inversa di π .

Per vedere che g è continua, servirebbe un calcolo:

come prima, la retta cercata è parametrizzata da

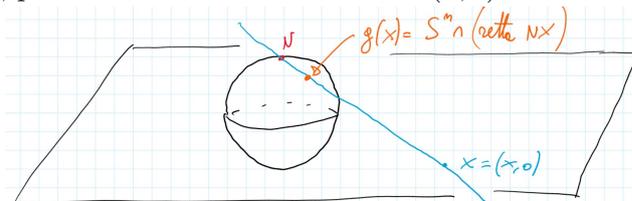
$\varphi : t \mapsto (1-t)N + t(x, 0) = (tx, 1-t)$. Vogliamo

imporre $\|\varphi(t)\| = 1$, cioè $\|tx\|^2 + (1-t)^2 = 1 \iff$

$t^2\|x\|^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \iff t^2(1 + \|x\|^2) - 2t = 0 \iff t = 0$ (soluzione che corrisponde al Polo Nord)

oppure $t = \frac{2}{1 + \|x\|^2}$ (che corrisponde al punto che ci interessa).

Perciò $g(x) = \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2}, 1 - \frac{2}{1 + \|x\|^2}\right) = \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}\right)$ che è chiaramente continua. \square



Osservazione 65. $\forall P, P' \in S^n \exists f : S^n \rightarrow S^n$ omeomorfismo tale che $f(P) = P'$ (si dice che S^n è omogenea).

Infatti, dall'algebra lineare, sappiamo che, dati $P, P' \in S^n$, $\exists A \in \mathcal{O}(n+1)$ tale che $A \cdot P = P'$. A è un omeomorfismo di \mathbb{R}^{n+1} che si restringe a un omeomorfismo di S^n , da cui la tesi.

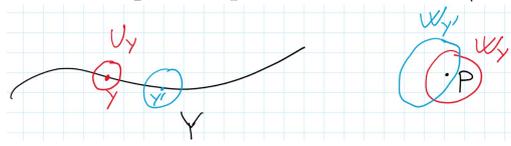
Osservazione 66. $\forall P \in S^n \ S^n \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^n$ (sono omeomorfi).

Infatti, per l'Osservazione 65, $S^n \setminus \{P\} \cong S^n \setminus \{N\}$ in quanto un omeomorfismo di S^n che porta P in N si restringe a un omeomorfismo tra $S^n \setminus \{P\}$ e $S^n \setminus \{N\}$, ma $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ per quanto visto.

Abbiamo visto che un sottospazio compatto non è necessariamente chiuso (topologia indiscreta, cofinita, ...), vale però il seguente

Teorema 2.19.2. Se X è T_2 e $Y \subseteq X$ è compatto, allora Y è chiuso.

Dimostrazione. Vogliamo vedere che $X \setminus Y$ è aperto, cioè è intorno di ogni suo punto: sia $P \in X \setminus Y$. Poiché X è T_2 , $\forall y \in Y \exists U_y, W_y$ aperti di X tali che $y \in U_y$, $P \in W_y$ e $U_y \cap W_y = \emptyset$. Ovviamente $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} U_y$ e, per compattezza, abbiamo allora che esistono y_1, \dots, y_n tali che $Y \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$. Sia $W = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$ l'intersezione dei corrispondenti intorni di P , allora W è un aperto che contiene P , in quanto intersezione finita di aperti che contengono P . Inoltre,



$$W \cap Y \subseteq W \cap (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}) = (W \cap U_{y_1}) \cup \dots \cup (W \cap U_{y_n}) = \emptyset$$

in quanto $W \cap U_{y_j} \subseteq W_{y_j} \cap U_{y_j} = \emptyset \forall j = 1, \dots, n$. □

La dimostrazione appena fatta ci fornisce anche la seguente

Proposizione 2.19.3. Se X è compatto e T_2 , allora X è regolare (cioè T_1 e T_3).

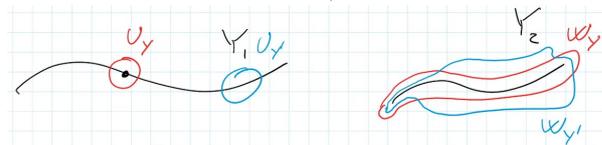
Dimostrazione. X è T_1 , perché è T_2 , dunque basta verificare che sia T_3 . Siano $Y \subseteq X$ un chiuso e $P \in X \setminus Y$. Come nella dimostrazione precedente, possiamo costruire un aperto $U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ che contenga Y ed un aperto $W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$ che contenga P disgiunti. Bisogna usare che, essendo chiuso in un compatto, Y è compatto (**Teorema 2.18.1**). □

In realtà vale di più:

Teorema 2.19.4. Se X è compatto e T_2 , allora X è normale (cioè T_1 e T_4).

Dimostrazione. X è T_1 , perché è T_2 , perciò basta verificare che sia T_4 : siano Y_1, Y_2 chiusi di X .

Poiché X è T_3 (**Proposizione 2.19.3**), $\forall y \in Y_1 \exists U_y, W_y$ aperti tali che $y \in U_y$, $Y_2 \subseteq W_y$ e $U_y \cap W_y = \emptyset$. Poiché $Y_1 \subseteq \bigcup_{y \in Y_1} U_y$ ed è compatto, $\exists y_1, \dots, y_n \in Y_1$



tali che $Y_1 \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$.

Poniamo $U = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ e $W = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$. Per costruzione, $Y_1 \subseteq U$, $Y_2 \subseteq W$, U e W sono aperti ⁷⁵ e $U \cap W = (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}) \cap (W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}) = \emptyset$, in quanto $U_{y_j} \cap W_{y_j} = \emptyset \forall j = 1, \dots, n$. □

⁷⁵Sono rispettivamente unione e intersezione finita di aperti.

2.20 Compattezza dei prodotti

Lemma 2.20.1. Se \mathcal{B} è una base della topologia di uno spazio Z e da ogni ricoprimento di Z con aperti di \mathcal{B} è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, allora Z è compatto.

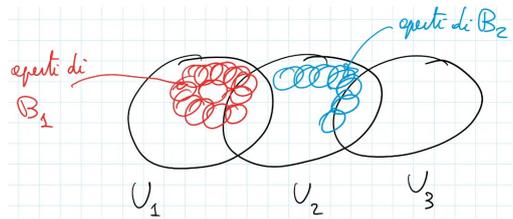
Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento generico di Z .

Per definizione di base, $\forall i \in I U_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$, dove $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$.

Dunque $\Omega = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ è un ricoprimento di Z con aperti di \mathcal{B} .

Per ipotesi, $\exists B_1, \dots, B_k \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ tali che $Z = B_1 \cup \dots \cup B_k$.

Se $B_j \in \mathcal{B}_{i_j}$, si ha $B_j \subseteq U_{i_j}$, per cui $Z = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ e abbiamo così trovato il sottoricoprimento finito di \mathcal{U} cercato. □



Osservazione 67. L'enunciato del **Lemma 2.20.1** dice che possiamo controllare la compattezza su una base. Il fatto che lo possiamo controllare su una prebase è vero (assumendo l'**Assioma della scelta**), ma è molto più delicato e si chiama **Teorema di Alexander**.

Teorema 2.20.2. Se X e Y sono spazi compatti, allora $X \times Y$ è compatto.

Dimostrazione. Per il **Lemma 2.20.1**, basta dimostrare che, dato un qualsiasi ricoprimento di $X \times Y$ con aperti della base standard, da esso possiamo estrarre un sottoricoprimento finito.

Sia $\mathcal{U} = \{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ un tale ricoprimento, dove, $\forall i \in I$, U_i è aperto in X e V_i è aperto in Y . $\forall x_0 \in X \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ è omeomorfo a Y ed è perciò compatto. Dunque $\exists I_{x_0} \subseteq I$ finito tale che $\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I_{x_0}} (U_i \times V_i)$.

Possiamo anche supporre $x_0 \in U_i \forall i \in I_{x_0}$, altrimenti $(U_i \times V_i) \cap (\{x_0\} \times Y) = \emptyset$ e possiamo semplicemente togliere $U_i \times V_i$. Essendo intersezione finita di aperti che contengono x_0 , l'insieme $U_{x_0} = \bigcap_{i \in I_{x_0}} U_i$ è un aperto di X che contiene x_0 .

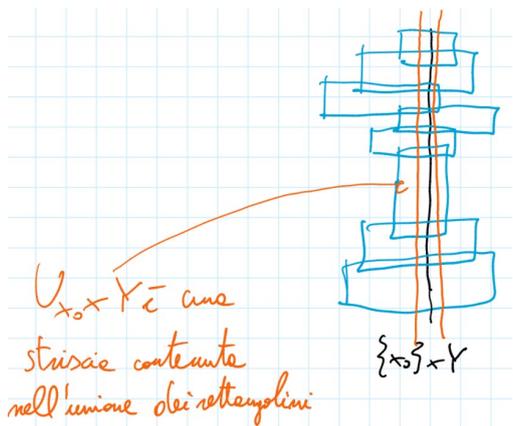
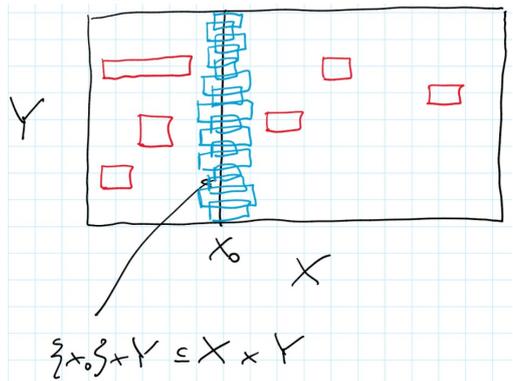
U_{x_0} è l'intersezione delle proiezioni su X degli $U_i \times V_i$, con $i \in I_{x_0}$. Per costruzione, $U_{x_0} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I_{x_0}} (U_i \times V_i)$. Ripetendo

la costruzione $\forall x \in X$, otteniamo $I_x \subseteq I$ finito e $U_x \subseteq X$ aperto che contiene x tali che $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I_x} (U_i \times V_i)$.

Ora, $\{U_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X per cui, per compattezza, $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, perciò

$$X \times Y \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^n U_{x_j} \right) \times Y = \bigcup_{j=1}^n (U_{x_j} \times Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^n \left(\bigcup_{i \in I_{x_j}} (U_i \times V_i) \right)$$

da cui la tesi. □



Teorema 2.20.3 (Heine-Borel). $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $\iff Y$ è chiuso e limitato.

Dimostrazione. (\implies) Se Y è compatto, allora, essendo la sua topologia indotta dalla metrica di \mathbb{R}^n , è limitato come spazio metrico (vedasi **Osservazione 60**), cioè è limitato in \mathbb{R}^n . Inoltre, poiché \mathbb{R}^n è T_2 , deve anche essere chiuso (vedasi **Teorema 2.19.2**).

(\impliedby) Se Y è limitato, allora $\exists R > 0$ tale che $Y \subseteq [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Ora, $[-R, R]^n$ è compatto, in quanto $[-R, R] \cong [0, 1]$ è compatto e un prodotto finito di compatti è compatto ⁷⁶. Y chiuso in $\mathbb{R}^n \implies Y$ chiuso in $[-R, R]^n$, ma un chiuso in un compatto è compatto, dunque Y è compatto. □

⁷⁶Segue banalmente per induzione dal caso con due fattori.

Teorema 2.20.4. *Se X è uno spazio topologico compatto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Visto che X è compatto e f è continua, segue che $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ è compatto, quindi è chiuso e limitato. *Limitato* $\implies m = \inf f \in \mathbb{R}, M = \sup f \in \mathbb{R}$. *Chiuso* $\implies m, M \in f(X)$ ⁷⁷. \square

Corollario 2.20.5. *Tutte le norme su \mathbb{R}^n (più in generale su uno spazio vettoriale reale V con $\dim_{\mathbb{R}} V < +\infty$) inducono la stessa topologia.*

(Una norma $\|\cdot\|$ su \mathbb{R}^n induce una distanza d definita da $d(x, y) = \|x - y\|$. Stiamo dicendo che se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme e inducono d_1 e d_2 , allora d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti.)

Sketch della Dimostrazione. Basta confrontare una norma qualsiasi $\|\cdot\|$ con la norma Euclidea $\|\cdot\|_E$ e mostrare che $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$k_1 \|x\|_E \leq \|x\| \leq k_2 \|x\|_E \quad (2.1)$$

(poi segue $k_1 d_E(x, y) \leq d(x, y) \leq k_2 d_E(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e dunque d e d_E sono topologicamente equivalenti). La disuguaglianza (2.1) (se $\|x\|_E \neq 0$) è equivalente a

$$k_1 \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_E} \leq k_2, \text{ con } \frac{\|x\|}{\|x\|_E} = \frac{1}{\|x\|_E} \cdot \|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_E} \right\| \text{ e } \frac{x}{\|x\|_E} \in S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_E = 1\}$$

Osserviamo che S^{n-1} è un compatto, visto che è limitato e chiuso ⁷⁸. Possiamo quindi dire che $\|\cdot\| : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, essendo una funzione continua, ammette massimo e minimo. \square

Osservazione 68. *Non è vero che, se V ha dimensione infinita, allora tutte le norme sono topologicamente equivalenti (esempi foglio di esercizi).*

Teorema 2.20.6. *Se X è compatto, Y è T_2 e $f : X \rightarrow Y$ è continua, allora f è chiusa.*

Dimostrazione. Prendiamo $C \subseteq X$ chiuso e verifichiamo che $f(C) \subseteq Y$ sia chiuso.

Visto che C è un chiuso di un compatto, è compatto. Essendo un compatto di uno spazio T_2 , $f(C)$ è chiuso in Y , cioè quello che volevamo. \square

Conseguenza: nelle ipotesi del **Teorema 2.20.6**, se sappiamo anche che f è biunivoca, allora possiamo concludere che è un omeomorfismo.

Non-esempio: $f : [0, 1) \rightarrow S^1$ non è un omeomorfismo (già visto) pur essendo continua e biunivoca (il dominio non è compatto!).
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

⁷⁷Ad esempio prendendo una successione $f(x_n)$ tale che $|f(x_n) - M| < \frac{1}{n}$, ecc...

⁷⁸Ad esempio è preimmagine di 1 tramite $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

2.21 Compattificazione di Alexandroff (o a un punto)

Idea: Dato uno spazio X , lo rendiamo compatto aggiungendogli un punto.

Dato X è uno spazio topologico, consideriamo $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ (dove ∞ è un elemento tale che $\infty \notin X$) e lo dotiamo della seguente topologia: $A \subseteq \widehat{X}$ è aperto se:

- $\infty \notin A$ e A è aperto di X ;
- $\infty \in A$ e $X \setminus A$ è chiuso e compatto di X .

Teorema 2.21.1. ① Questo definisce effettivamente una topologia su \widehat{X} .

② $i : X \hookrightarrow \widehat{X}$ è un'immersione topologica aperta.

③ \widehat{X} è compatto.

Dimostrazione. ① È una facile verifica (per **Esercizio**).

② Vediamo che i è continua: dato $A \subseteq \widehat{X}$, vogliamo vedere che $i^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto:

- se $\infty \notin A$, allora, per definizione, $i^{-1}(A)$ è un aperto di X ;
- se $\infty \in A$, allora $i^{-1}(A) = X \setminus (X \setminus A)$ che è quindi aperto.

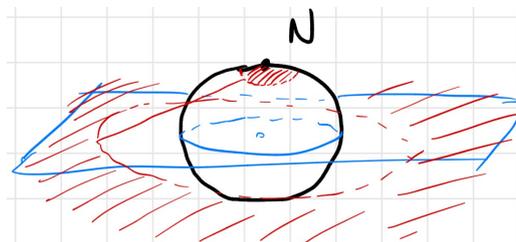
chiuso e
cpt di X

Inoltre, i è chiaramente iniettiva ed è aperta per costruzione⁷⁹. Dunque i è un'immersione aperta.

③ Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di \widehat{X} . Sia $i_0 \in I$ tale che $\infty \in A_{i_0}$, allora $\widehat{X} \setminus A_{i_0} = i(K)$, dove $K \subseteq X$ è compatto e chiuso.

Visto che $i(K)$ è compatto, $\exists J \subseteq I$ finito tale che $i(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$, dunque $\widehat{X} = A_{i_0} \cup \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right)$ e abbiamo trovato un sottoricoprimento finito. □

Esempio 47. $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$, dove ∞ corrisponde al Polo Nord (N) e $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$ è l'inversa della proiezione stereografica (da formalizzare).



Domanda: cosa succede se X è già compatto?

⁷⁹Se $B \subseteq X$ è aperto, allora, per definizione, $i(B) \subseteq X \cup \{\infty\}$ è aperto: $\infty \notin i(B)$.

2.22 Compattezza in spazi metrici

Definizione 2.22.1. Uno spazio topologico X si dice **sequenzialmente compatto** (o **compatto per successioni**), se ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

Proposizione 2.22.1. Se X è I-numerabile ed è compatto, allora X è sequenzialmente compatto.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione: vogliamo estrarre una sottosuccessione convergente. Per $m \in \mathbb{N}$, poniamo $C_m = \{x_n \mid n \geq m\} \subseteq X$. Questi C_m sono chiusi, vale $C_{m+1} \subseteq C_m$ e $C_m \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Per compattezza di X , concludiamo che $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m \neq \emptyset$. Fissiamo $\bar{x} \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m$ e vogliamo costruire x_{n_k} che converga a \bar{x} . Visto che X è I-numerabile, possiamo trovare un S.F.I. di \bar{x} numerabile $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Possiamo anche supporre che $U_{k+1} \subseteq U_k \forall k \in \mathbb{N}$ (già visto). Costruiamo x_{n_k} ricorsivamente:

- visto che $\bar{x} \in C_0 = \overline{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ e $U_0 \in I(\bar{x})$, abbiamo che $U_0 \cap \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$, quindi scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} \in U_0$.
- se abbiamo già $n_0 < n_1 < \dots < n_k \in \mathbb{N}$ tali che $x_{n_i} \in U_i \forall i = 0, \dots, k$, visto che $U_{k+1} \in I(\bar{x})$ e $\bar{x} \in C_{n_{k+1}} = \overline{\{x_n \mid n \geq n_{k+1}\}}$, concludiamo che $U_{k+1} \cap \{x_n \mid n \geq n_{k+1}\} \neq \emptyset$ e scegliamo $x_{n_{k+1}}$ in questa intersezione. Quindi $x_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$.

Questo definisce ricorsivamente x_{n_k} .

Ora verifichiamo che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, il che conclude la dimostrazione: sia $U \in I(\bar{x})$.

Dobbiamo vedere che $x_{n_k} \in U$ definitivamente. Visto che $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è un S.F.I., $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $U_{k_0} \subseteq U$, ma allora per $k \geq k_0$, per costruzione, abbiamo $x_{n_k} \in U_k \subseteq U_{k_0} \subseteq U$ e abbiamo finito. \square

Fatto 2.22.2. *Il viceversa non è vero.*

Proposizione 2.22.3. Se X è II-numerabile, allora X è compatto $\iff X$ è sequenzialmente compatto.

Dimostrazione. (\implies) Visto che II-numerabile \implies I-numerabile, la **Proposizione 2.22.1** conclude. (\impliedby) Per assurdo, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X che non abbia sottoricoprimenti finiti e costruiamo una successione senza sottosuccessioni convergenti.

Claim: \mathcal{U} ha un sottoricoprimento numerabile.

Sia $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile di X e scriviamo $U_i = \bigcup_{n \in J_i} B_n$, con $J_i \subseteq \mathbb{N}$.

Consideriamo $J = \bigcup_{i \in I} J_i \subseteq \mathbb{N}$. Visto che $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di X , pure $\{B_n\}_{n \in J}$ è un ricoprimento (aperto) di X .

Ora scegliamo, per $n \in J$, un indice $i(n) \in I$ tale che $B_n \subseteq U_{i(n)}$ e abbiamo che $\{U_{i(n)}\}_{n \in J}$ è un ricoprimento di X al più numerabile. Nella dimostrazione possiamo anche dire che J non è finito, perché stiamo supponendo che \mathcal{U} non abbia sottoricoprimenti finiti. Costruiamo $\{x_n\} \subseteq X$ in questo modo: per $n \in \mathbb{N}$, scegliamo $x_n \in X \setminus (U_{i(0)} \cup \dots \cup U_{i(n)}) \neq \emptyset$ ⁸⁰. Diciamo che questa $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti. Se, per assurdo, avessimo $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, (sia $j \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{x} \in U_{i(j)}$) dovremmo avere che $x_{n_k} \in U_{i(j)}$ definitivamente, ma, per costruzione, se $n_k \geq j$, allora $x_{n_k} \in X \setminus (U_{i(0)} \cup \dots \cup U_{i(n_k)}) \subseteq X \setminus U_{i(j)}$ e questo dà un assurdo. \square

Definizione 2.22.2. X si dice **di Lindelöf**, se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento al più numerabile.

Abbiamo quindi dimostrato che II-numerabile \implies Lindelöf.

Fatto 2.22.4. In generale, compatto $\not\iff$ sequenzialmente compatto.

(Esempi omissi.)

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Reminder: una successione $\{x_n\} \subseteq X$ è **di Cauchy**, se $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m > N$.

⁸⁰ \mathcal{U} non ha sottoricoprimenti finiti.

Osservazione 69. *Le successioni convergenti sono di Cauchy.*

Infatti: se $\{x_n\} \subseteq X$ e $x_n \rightarrow \bar{x}$, allora, dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N$. A questo punto abbiamo $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \bar{x}) + d(x_m, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \forall n, m > N$.

Definizione 2.22.3. (X, d) si dice **completo**, se ogni successione di Cauchy converge.

Esempio 48. \mathbb{Q} non è completo.

Infatti: se $q_n \in \mathbb{Q}$ è una successione che converge in \mathbb{R} a $\sqrt{2}$, allora è di Cauchy, però non ha limite in \mathbb{Q} . Se convergesse a $\bar{q} \in \mathbb{Q}$, allora \bar{q} sarebbe il limite anche in \mathbb{R} e seguirebbe che $\sqrt{2} = \bar{q} \in \mathbb{Q}$ che è ovviamente falso.

Lemma 2.22.5. *Se $\{x_n\} \subseteq X$ è di Cauchy e ha una sottosuccessione convergente, allora $\{x_n\}$ converge (allo stesso limite).*

Dimostrazione. Supponiamo che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ e mostriamo che $x_n \rightarrow \bar{x}$: dato $\varepsilon > 0$, vogliamo vedere che $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$ definitivamente.

Visto che x_n è di Cauchy, $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \forall n, m > N$ e, visto che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2} \forall k > k_0$. Prendiamo $M = \max\{N, n_{k_0}\}$.

Se $n \geq M$ ed $\exists \bar{k}$ tale che $n_{\bar{k}} \geq M$, allora $d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_{n_{\bar{k}}}) + d(x_{n_{\bar{k}}}, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

$$\begin{array}{ll} \frac{n \geq M > N}{n_{\bar{k}} \geq M \geq N} & \frac{n_{\bar{k}} \geq M \geq n_{k_0}}{\Rightarrow \bar{k} \geq k_0} \end{array}$$

Proposizione 2.22.6. *Se uno spazio metrico (X, d) è sequenzialmente compatto, allora è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di Cauchy. Per ipotesi, possiamo trovare una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge. Per il **Lemma 2.22.5**, concludiamo che $\{x_n\}$ converge (allo stesso limite di $\{x_{n_k}\}$). Dunque (X, d) è completo. □

Corollario 2.22.7. \mathbb{R}^k è completo.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$ di Cauchy: vogliamo vedere che converge. Mostriamo che $\{x_n\}$ è limitata, cioè $\exists R > 0$ tale che $\{x_n\} \subseteq \overline{B(0, R)}$ (e poi useremo la compattezza di questa palla).

Nella proprietà di Cauchy, prendiamo $\varepsilon = 1$. Troviamo che $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < 1 \forall n, m \geq N$ (in particolare $d(x_n, x_m) < 1 \forall n \geq N$). Prendiamo $R = \max\{\|x_0\|, \dots, \|x_N\|\} + 1$ e diciamo che $\{x_k\} \subseteq \overline{B(0, R)}$. Infatti, gli x_i , con $0 \leq i \leq N$, ci stanno per costruzione e, per $n \geq N$, abbiamo $d(x_n, 0) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, 0) < 1 + \|x_N\| \leq 1 + \max_{0 \leq i \leq N} \|x_i\| = R$.

Ora, $\overline{B(0, R)}$ è sequenzialmente compatto, quindi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente in $\overline{B(0, R)}$ da $\{x_n\}$. Questa rimane di Cauchy in $\overline{B(0, R)}$ (stiamo usando la distanza ristretta da \mathbb{R}^k), quindi converge per il **Lemma 2.22.5** e il limite è anche il limite di $\{x_n\}$ vista in \mathbb{R}^k ⁸¹. □

Osservazione 70. *Non è vero che completo \implies sequenzialmente compatto (\mathbb{R}^n è un esempio).*

Definizione 2.22.4. *Uno spazio metrico (X, d) si dice **totalmente limitato**, se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di X costituito da palle aperte di raggio ε .*

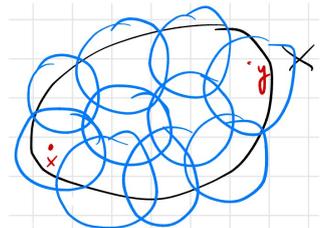
Proposizione 2.22.8. *Se (X, d) è totalmente limitato, allora è limitato.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon = 1$ nella **Definizione 2.22.4** di **totale limitatezza**.

Siano $B(x_1, 1), \dots, B(x_n, 1)$ delle palle di raggio 1 che coprono X : Prendiamo $R = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{d(x_i, x_j)\} + 2$ e diciamo che $d(x, y) < R \forall x, y \in X$. Infatti, diciamo che $x \in B(x_i, 1)$ e $y \in B(x_j, 1)$ ^a e dunque

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < 1 + \max_{1 \leq k, l \leq n} \{d(x_k, x_l)\} + 1 = R$$

^a i e j esistono perché $\{B(x_k, 1)\}$ è un ricoprimento di X .



□

⁸¹Per continuità dell'inclusione $\overline{B(0, R)} \subseteq \mathbb{R}^k$.

Osservazione 71. *Non vale il viceversa.*

Ad esempio, dato $X = \mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = \min\{d_E(x, y), 1\}$, questa distanza è limitata, ma (\mathbb{R}^n, d) non è totalmente limitato ⁸².

Lemma 2.22.9. *Se (X, d) è totalmente limitato, allora è II-numerabile.*

Dimostrazione. Ricordiamo che uno spazio metrico separabile (\exists sottoinsieme numerabile denso) è II-numerabile (**Teorema 2.4.5**). Mostriamo quindi che X è separabile: $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento finito di palle aperte di raggio $\varepsilon = \frac{1}{n}$: $\{B(x_i^n, \frac{1}{n})\}_{1 \leq i \leq k_n}$.

Prendiamo $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{k_n} \{x_i^n\} \subseteq X$. Questo è al più numerabile, in quanto unione numerabile di insiemi finiti. Mostriamo che E è denso in X . Basta far vedere che $E \cap B(x, R) \neq \emptyset \forall x \in X$ e $\forall R > 0$. Scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < R$ e prendiamo x_i^n tale che $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$ (formano un ricoprimento di X , con $1 \leq i \leq k_n$). Ora



abbiamo $x_i^n \in B(x, R)$ (quindi $E \cap B(x, R) \neq \emptyset$) perché $d(x_i^n, x) < \frac{1}{n} < R$, visto che $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$. \square

Teorema 2.22.10. *Se (X, d) è uno spazio metrico, i seguenti fatti sono equivalenti:*

- ① X è compatto.
- ② X è sequenzialmente compatto.
- ③ X è completo e totalmente limitato.

Dimostrazione. (① \implies ②) Già visto: **Proposizione 2.22.1** (gli spazi metrici sono I-numerabili).

(② \implies ③) Abbiamo visto (**Proposizione 2.22.6**) che sequenzialmente compatto \implies completo.

Per assurdo supponiamo che X non sia totalmente limitato e costruiamo una successione $\{x_n\}$ senza sottosuccessioni convergenti.

X non totalmente limitato $\implies \exists \varepsilon > 0$ per cui non riusciamo a ricoprire X con un numero finito di palle di raggio ε . Prendiamo $x_0 \in X$ arbitrariamente e poi ricorsivamente scegliamo

$$x_k \in X \setminus \underbrace{(B(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{k-1}, \varepsilon))}_{\neq \emptyset \text{ per ipotesi}}$$

Ora, $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy (quindi non ha nemmeno sottosuccessioni convergenti). Infatti, per costruzione della successione, $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon \forall n \neq m$ e questo mostra che non ci possono essere sottosuccessioni di Cauchy. Questo dà un assurdo con l'ipotesi di compattezza sequenziale.

(③ \implies ①) Per il **Lemma 2.22.9**, totalmente limitato \implies II-numerabile, dunque ci basta far vedere che X è sequenzialmente compatto ⁸³.

Sia quindi $\{x_n\} \subseteq X$ una successione ed estraiamo una sottosuccessione convergente.

Dato $k \in \mathbb{N}$, fissiamo un ricoprimento finito \mathcal{U}_k di palle di raggio $\frac{1}{k}$.

Costruiamo ricorsivamente una sottosuccessione di $\{x_n\}$ che sia di Cauchy:

$k = 1$: \mathcal{U}_1 è un ricoprimento finito di X , quindi $\exists U_1 \in \mathcal{U}_1$ tale che $\{n \mid x_n \in U_1\}$ sia infinito. Fissiamo $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_1} \in U_1$;

$k = 2$: \mathcal{U}_2 è un ricoprimento finito di $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_2 \cap U_1 = \{U_2 \cap U_1 \mid U_2 \in \mathcal{U}_2\}$ è un ricoprimento finito di U_1 , quindi, come prima, $\exists U_2 \in \mathcal{U}_2$ tale che $\{n \mid x_n \in U_2 \cap U_1\}$ sia infinito. Scegliamo $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} \in U_2 \cap U_1$;

$k > 2$: Induttivamente, costruiamo $\{x_{n_k}\}$ in modo che $x_{n_k} \in U_k \cap U_{k-1} \cap \dots \cap U_2 \cap U_1$, cioè $x_{n_k} \in U_i \forall i = 1, \dots, k$. Questa sottosuccessione è di Cauchy. Infatti, se $k_1, k_2 \geq m$, allora $x_{n_{k_1}}$ e $x_{n_{k_2}}$ stanno entrambi in U_m (= palla di raggio $\frac{1}{m}$), quindi $d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \frac{2}{m}$ (= 2 · raggio) e, dato $\varepsilon > 0$, scegliendo m tale che $\frac{2}{m} < \varepsilon$, vediamo che $\forall k_1, k_2 \geq m$ si ha $d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \varepsilon$. Visto che X è completo, questa sottosuccessione converge, essendo di Cauchy.

Questo mostra la compattezza sequenziale. \square

⁸²Le palle di raggio < 1 per d e d_E sono le stesse e (\mathbb{R}^n, d_E) non è totalmente limitato.

⁸³Se X è II-numerabile, compatto \iff sequenzialmente compatto (**Proposizione 2.22.3**).

Esercizi XI settimana

Esercizio 44 (Teorema di Wallace).

Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottospazi compatti e W un aperto di $X \times Y$ che contiene $A \times B$. Si mostri che esistono aperti U di X e V di Y tali che

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad U \times V \subseteq W$$

Dimostrazione. Fissiamo $y \in B$ e guardiamo $X \times \{y\}$. $\forall x \in A$ possiamo trovare un aperto della forma $U_{x,y} \times V_x$ di $X \times Y$ che sia contenuto in W e contenga $(x, y) \in A \times B$, per definizione della topologia prodotto e perché W è aperto.

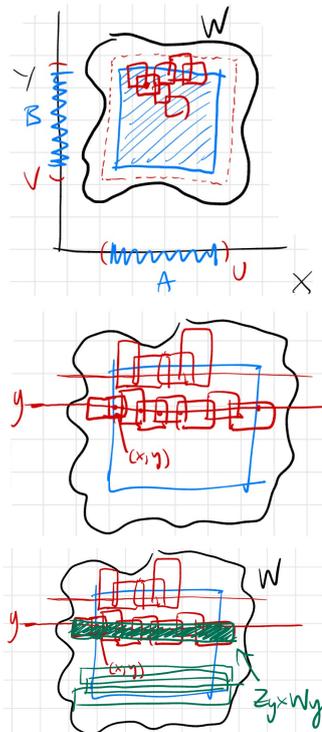
Questo $\{U_{x,y} \times V_x\}_{x \in A}$ è un ricoprimento aperto di $A \times \{y\} \subseteq X \times Y$ che è compatto, perché è omeomorfo ad A . Estraiamo un sottoricoprimento finito $\{U_{x,y} \times V_x\}_{x \in I_y}$, con $I_y \subseteq A$ finito.

Sia $W_y = \bigcap_{x \in I_y} V_x$ un aperto (intersezione finita di aperti) di Y che contenga y . $Z_y = \bigcup_{x \in I_y} U_{x,y}$ è un aperto di X che contiene A , dunque $A \times \{y\} \subseteq Z_y \times W_y \subseteq W$ in quanto $A \subseteq Z_y$, $y \in W_y$, un

$(a, b) \in \left(\bigcup_{x \in I_y} U_{x,y} \right) \times \left(\bigcap_{x \in I_y} V_x \right)$ è tale che $a \in U_{\bar{x},y}$ per qualche $\bar{x} \in I_y$ e sicuramente $b \in V_{\bar{x}} \implies (a, b) \in U_{\bar{x},y} \times V_{\bar{x}} \subseteq W \implies (a, b) \in W$. Ora "facciamo variare y ": $\{W_y\}_{y \in B}$ è un ricoprimento aperto di B che è compatto, quindi ne estraiamo un sottoricoprimento finito $\{W_y\}_{y \in J}$, con $J \subseteq B$ finito.

Adesso poniamo $U = \bigcap_{y \in J} Z_y \subseteq X$ e $V = \bigcup_{y \in J} W_y \subseteq Y$: sono aperti, si ha che $A \subseteq U$, visto che $A \subseteq Z_y \forall y \in B$, e $B \subseteq V = \bigcup_{y \in J} W_y$, per costruzione.

Resta da vedere che $U \times V \subseteq W$: $U \times V = \left(\bigcap_{y \in J} Z_y \right) \times \left(\bigcup_{y \in J} W_y \right)$, un certo $(a, b) \in U \times V$ è tale che $a \in Z_{\bar{y}}$ e $b \in W_{\bar{y}}$ per qualche $\bar{y} \in J \implies (a, b) \in Z_{\bar{y}} \times W_{\bar{y}} \subseteq W \implies (a, b) \in W$. □



Esercizio 45. Una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici si dice **propria** se, per ogni compatto $K \subseteq Y$, lo spazio $f^{-1}(K) \subseteq X$ è compatto.

- (1) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Si mostri che f è propria \iff per ogni successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ ⁸⁴, si ha $\|f(x_n)\| \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. (1) (\implies) Avendo f propria e $\|x_n\| \rightarrow +\infty$, supponiamo, per assurdo, che

$$\|f(x_n)\| \not\rightarrow +\infty$$

A meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre $\{f(x_n)\} \subseteq \overline{B(0, R)}$, per qualche $R > 0$. Visto che f è propria, $f^{-1}(\overline{B(0, R)})$ è un compatto di \mathbb{R}^n , quindi chiuso e limitato e avremmo perciò che $\{x_n\} \subseteq f^{-1}(\overline{B(0, R)}) \not\rightarrow +\infty$.

(\impliedby) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto e mostriamo che $f^{-1}(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ sia compatto. K è chiuso (in quanto compatto di un T_2 , **Teorema 2.19.2**) e f è continua, dunque $f^{-1}(K)$ è chiuso.

Se, per assurdo, non fosse limitato, allora potremmo costruire $\{x_n\} \subseteq f^{-1}(K)$ tale che $\|x_n\| \rightarrow +\infty$. Quindi, per ipotesi, dovremmo avere $\|f(x_n)\| \rightarrow +\infty$, ma anche $\{f(x_n)\} \subseteq K$ che, essendo compatto, è limitato e questo è assurdo. □

⁸⁴Cioè x_n esce da ogni compatto.

2.23 Numero di Lebesgue e Uniforme continuità

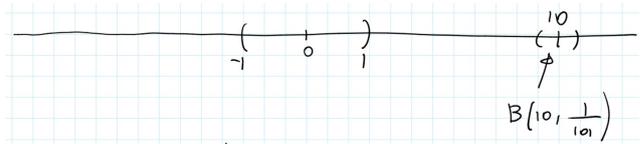
Definizione 2.23.1. Siano X uno spazio metrico e Ω un ricoprimento di X . Si dice che Ω **ammette il numero di Lebesgue** $\varepsilon > 0$, se $\forall x \in X \exists U \in \Omega$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Non tutti i ricoprimenti ammettono un numero di Lebesgue:

dato $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{B(x, \frac{1}{x^2+1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ è un ricoprimento aperto che non ha numero di Lebesgue.

Quando $x \rightarrow \pm\infty$, gli aperti del ricoprimento che contengono x hanno raggio che tende a 0.

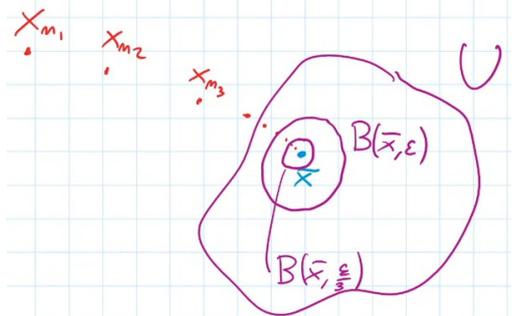
Perciò, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tale che $\forall x > M$ (e anche $\forall x < -M$) $\nexists U \in \Omega$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.



Teorema 2.23.1. Se X è metrico e compatto, allora ogni ricoprimento aperto di X ammette un numero di Lebesgue.

Dimostrazione. Sia Ω un ricoprimento aperto di X e supponiamo, per assurdo, che Ω non ammetta alcun numero di Lebesgue $\varepsilon > 0$, dunque $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X$ tale che $B(x_n, 2^{-n})$ non è contenuta in alcun aperto di Ω . Poiché uno spazio metrico compatto è sequenzialmente compatto, $\exists x_{n_k}$ sottosuccessione di x_n tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in X$. Visto che Ω è un ricoprimento, $\exists U \in \Omega$ tale che $\bar{x} \in U$ e, poiché U è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq U$. Per definizione di limite, $\exists k_0$ tale che $x_{n_k} \in B(\bar{x}, \frac{\varepsilon}{3}) \forall k \geq k_0$. Per la disuguaglianza triangolare, $\forall k \geq k_0 B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon}{3}) \subseteq B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq U$.

Poiché $2^{-n_k} \rightarrow 0$, $\exists k_1 > k_0$ tale che $2^{-n_{k_1}} < \frac{\varepsilon}{3} \implies B(x_{n_{k_1}}, 2^{-n_{k_1}}) \subseteq B(x_{n_{k_1}}, \frac{\varepsilon}{3}) \subseteq U$.



^aAndrebbe bene anche $\frac{2}{3}\varepsilon$.

Ricordiamo che, data $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra spazi metrici, allora f è continua, se $\forall x_0 \in X$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.

continuità in x_0

Definizione 2.23.2. f si dice **uniformemente continua**, se, nella formula qui sopra, δ in realtà dipende solo da ε e non da x_0 , cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0 \in X f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ ⁸⁵. Sfruttando la simmetria dell'ultima condizione possiamo perciò affermare che

$$f : X \rightarrow Y \text{ è uniformemente continua} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che} \\ d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Volendo, possiamo prendere quest'ultimo enunciato come definizione di **uniforme continuità**.

Esempio 49. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua ma non uniformemente continua.

Infatti, affinché si abbia $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si deve avere $|x^2 - y^2| < \varepsilon \iff |x - y| \cdot |x + y| < \varepsilon \iff$ (supponendo $x, y > 0 \implies x + y > 0$) $|x - y| < \frac{\varepsilon}{x+y}$.

Perciò, dato $\varepsilon = 1$ e posto $x_n = n$, otteniamo che $d(f(n), f(y)) < 1 \iff |y - n| < \frac{1}{n+y}$. Se assumiamo, ad esempio, $n \geq 2$, $\frac{1}{n+y} \leq \frac{1}{2} \implies$ da $|y - n| < \frac{1}{2}$, otteniamo $y \geq n - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$. Dunque $|y - n| < \frac{1}{n+y} < \frac{1}{n+\frac{3}{2}}$, perciò $\delta \leq \frac{1}{n+\frac{3}{2}} \forall n$ e quindi non può esistere un δ uniforme.

Teorema 2.23.2 (Heine-Cantor).

Siano X compatto e $f : X \rightarrow Y$ tra spazi metrici. Se f è continua, allora f è uniformemente continua.

⁸⁵ $\iff d(x_0, x) < \delta \implies d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, condizione simmetrica in x_0 e in x .

Dimostrazione. Per assurdo, se non fosse uniformemente continua, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\exists \{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ tali che $d(x_n, y_n) < 2^{-n}$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}$. Poiché X è compatto per successioni, $\exists x_{n_k}$ sottosuccessione tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Poiché $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$, anche $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \bar{x}$, ma f è continua in \bar{x} , per cui $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in B(\bar{x}, \delta)$, $d(f(x), f(\bar{x})) < \frac{\varepsilon}{3}$. Poiché $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ e $y_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, $\exists k_0$ tale che $\forall k > k_0$ $x_{n_k}, y_{n_k} \in B(\bar{x}, \delta)$, perciò

$$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(\bar{x})) + d(f(\bar{x}), f(y_{n_k})) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

Ciò dà la contraddizione cercata. □

Osservazione 72. *Una funzione uniformemente continua porta successioni di Cauchy in successioni di Cauchy (ovvio). Vedremo tra poco che ciò è falso per funzioni solamente continue.*

Problema: siano X, Y metrici, $A \subseteq X$ e $f : A \rightarrow Y$ continua. Sotto quale ipotesi f si estende in maniera continua ad \bar{A} ?

Esempio 50. $X = Y = \mathbb{R}$ e $A = (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ non si estende con continuità su $\bar{A} = [0, +\infty)$.

Esempio 51. $X = Y = \mathbb{R}$ e $A = (0, +\infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ non si estende con continuità su $\bar{A} = [0, +\infty)$.

In particolare, in entrambi questi casi, se prendiamo $(0, +\infty)$ come dominio di f , allora $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy, ma $f(x_n)$ non lo è ⁸⁶.

Teorema 2.23.3. *Siano X, Y metrici, Y completo e $A \subseteq X$. Se $f : A \rightarrow Y$ è uniformemente continua, allora f si estende (in modo unico) a una $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow Y$ continua.*

Dimostrazione. Sia $\bar{x} \in \bar{A}$. Poiché metrico \implies I-numerabile, $\exists x_n$ sottosuccessione, con $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$, tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$. Essendo convergente in X , x_n è di Cauchy. Poiché f è uniformemente continua, anche $f(x_n)$ è di Cauchy, per cui, essendo Y completo, $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \bar{y}$. Poiché le funzioni continue commutano con l'operazione limite, necessariamente, se $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow Y$ estende f , allora $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{y}$. Questo mostra l'unicità.

Per concludere dobbiamo verificare che \bar{f} sia ben definita ⁸⁷ e la \bar{f} così ottenuta sia effettivamente continua. Si tratta di semplici verifiche lasciate per **Esercizio**. □

⁸⁶Non è convergente ed \mathbb{R} è completo.

⁸⁷Cioè se $x'_n \rightarrow \bar{x}$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n)$.

2.24 Topologia quoziente

Siano X uno spazio topologico e \sim una relazione di equivalenza su X . Indichiamo con X/\sim l'insieme quoziente e con $\pi : X \rightarrow X/\sim$ la mappa di proiezione. Dotiamo X/\sim di una topologia così:

Definizione 2.24.1. $A \subseteq X/\sim$ è **aperto** $\iff \pi^{-1}(A)$ è aperto in X .

Di conseguenza, poiché $\pi^{-1}(A^c) = (\pi^{-1}(A))^c$, $C \subseteq X/\sim$ è **chiuso** $\iff \pi^{-1}(C)$ è chiuso in X .

Controlliamo che effettivamente si tratti di una topologia:

- $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ che è aperto in $X \implies \emptyset$ è aperto.
 $\pi^{-1}(X/\sim) = X$ che è aperto in $X \implies X/\sim$ è aperto.
- Se $\pi^{-1}(A_1)$ e $\pi^{-1}(A_2)$ sono aperti in X , allora lo è anche $\pi^{-1}(A_1 \cap A_2) = \pi^{-1}(A_1) \cap \pi^{-1}(A_2)$ in quanto intersezione di aperti $\implies A_1 \cap A_2$ è aperto in X/\sim .
- Se A_i , con $i \in I$, è aperto in $X/\sim \forall i \in I$, allora $\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(A_i)$ ⁸⁸ è aperto in X in quanto unione di aperti $\implies \bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto in X/\sim .

Teorema 2.24.1. La topologia quoziente su X/\sim è quella più fine che rende $\pi : X \rightarrow X/\sim$ continua.

Dimostrazione. Per definizione, dato $A \subseteq X/\sim$ aperto, anche $\pi^{-1}(A)$ è aperto in $X \implies \pi$ è continua. Ora, data τ una topologia qualsiasi che rende π continua, se $A \in \tau$, per continuità di π , allora l'insieme $\pi^{-1}(A)$ deve essere aperto in X e perciò A è aperto nella topologia quoziente. Dunque τ è contenuta nella topologia quoziente. \square

Teorema 2.24.2 (Proprietà universale della topologia quoziente).

Consideriamo il diagramma commutativo di fianco, dove X, Y sono topologici, X/\sim è dotato della topologia quoziente e $f = \bar{f} \circ \pi$. Vale che f è continua $\iff \bar{f}$ è continua.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \pi & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Dimostrazione. f è continua $\iff \forall A \subseteq Y$ aperto $f^{-1}(A)$ è aperto in $X \iff \forall A \subseteq Y$ aperto $\pi^{-1}(f^{-1}(A))$ è aperto in $X \iff \forall A \subseteq Y$ aperto $\bar{f}^{-1}(A)$ è aperto in $X/\sim \iff \bar{f}$ è continua. \square

Problema tipico: Dati X topologico e \sim relazione di equivalenza su X , “capire chi è” X/\sim (dimostrando ad esempio che è omeomorfo a oggetti già noti oppure studiando se è T_1, T_2 , metrizzabile, ...).

Per trovare Y omeomorfo a X/\sim , si procede di norma come segue:

1. innanzitutto si cerca di indovinare chi sia Y ;
2. si costruisce una $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(x_1) = f(x_2)$, se $x_1 \sim x_2$.

A questo punto è ben definita $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ tale che $\bar{f}([x]) = f(x) \forall [x] \in X/\sim$.

Per costruzione, il diagramma di fianco è commutativo. Si dice che \bar{f} è ottenuta “per passaggio al quoziente” di f . Per quanto visto, se f è continua, lo è anche \bar{f} .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \pi & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Ricapitolando, da una $f : X \rightarrow Y$ continua tale che $f(x_1) = f(x_2)$, se $x_1 \sim x_2$, abbiamo ottenuto $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ continua tale che $\bar{f} \circ \pi = f$.

$$\textcircled{1} \quad \bar{f} \text{ è iniettiva} \iff [f([x_1]) = f([x_2])] \iff [x_1] = [x_2] \iff [f(x_1) = f(x_2)] \iff \textcircled{89} x_1 \sim x_2.$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{f} \text{ è surgettiva} \iff f \text{ è surgettiva, in quanto } f = \bar{f} \circ \pi \text{ e } \pi \text{ è surgettiva.}$$

⁸⁸Ciascuno di questi è aperto in X .

⁸⁹(\iff) per la buona definizione di \bar{f} e (\implies) per l'injectività di \bar{f} .

Se ① e ② sono verificati, \bar{f} è una bigezione continua.

Se vogliamo che \bar{f} sia un omeomorfismo, allora serve che anche \bar{f}^{-1} sia continua e qui purtroppo non esistono ricette generali che lo garantiscano. Ricordiamo però, ad esempio, che una bigezione continua è un omeomorfismo \iff è chiusa \iff è aperta.

Definizione 2.24.2. $f : X \rightarrow Y$ continua è detta **identificazione** se valgono le seguenti condizioni:

1. f è surgettiva;
2. $A \subseteq Y$ è aperto $\iff f^{-1}(A)$ è aperto in X ((\implies) è automatica perché f è continua).

Ovviamente 2. è equivalente a

- 2.' $C \subseteq Y$ è chiuso $\iff f^{-1}(C)$ è chiuso in X .

Teorema 2.24.3. Siano $f : X \rightarrow Y$ un'identificazione e \sim la relazione di equivalenza su X data da $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. La mappa $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ ottenuta da f per passaggio al quoziente è un omeomorfismo.

(In realtà vale il se e solo se: se \bar{f} è un omeomorfismo, allora f deve essere un'identificazione.)

Dimostrazione. Un'identificazione è continua (vedasi sopra) e surgettiva, per cui, per costruzione, anche $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ è bigettiva e continua. Rimane da controllare che \bar{f}^{-1} sia continua, o, equivalentemente, che \bar{f} sia aperta. Sia $A \subseteq X/\sim$ aperto. Per vedere se $\bar{f}(A)$ è aperto, poiché f è un'identificazione, basta controllare che lo sia $f^{-1}(\bar{f}(A))$, ma, per il solito diagramma, $f^{-1}(\bar{f}(A)) = \pi^{-1}(A)$ e $\pi^{-1}(A)$ è aperto in X per definizione di topologia quoziente. Dunque $\bar{f}(A)$ è aperto. \square

Proposizione 2.24.4. Sia $f : X \rightarrow Y$ continua e surgettiva,

- ① se f è aperta, allora è un'identificazione.
- ② se f è chiusa, allora è un'identificazione.

Dimostrazione. ① Dobbiamo controllare che, se $f^{-1}(A)$ è aperto, allora A è aperto, ma, poiché f è surgettiva, $A = f(f^{-1}(A))$ e, visto che f è aperta e $f^{-1}(A)$ è aperto per ipotesi, A è aperto.

② Dimostrazione identica con i chiusi al posto degli aperti. \square

Nel foglio di esercizi, l'**Esercizio 52** dà un esempio di identificazione né aperta né chiusa.

Definizione 2.24.3. Data $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$ si dice **f-saturo** (o **saturo**, se f è ovvia), se $f^{-1}(f(A)) = A$, cioè, se $x \in A$ e $f(x') = f(x)$, allora anche $x' \in A$.

Osservazione 73. Data $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$ è *f-saturo* $\iff \exists B \subseteq Y$ tale che $A = f^{-1}(B)$.

Data una proiezione al quoziente $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $A \subseteq X$ è saturo (cioè π -saturo), se è unione di classi di equivalenza, cioè, se $\forall C \subseteq X$ classe di equivalenza, allora $A \cap C \neq \emptyset \implies C \subseteq A$.

Proposizione 2.24.5. ① $A \subseteq X/\sim$ è aperto \iff è immagine di un aperto saturo tramite π .

- ② $C \subseteq X/\sim$ è chiuso \iff è immagine di un chiuso saturo tramite π .

Dimostrazione. ① (\implies) A aperto \implies per l'**Osservazione 73**, $\pi^{-1}(A)$ è aperto saturo e, poiché π è surgettiva, $A = \pi(\pi^{-1}(A))$.

(\impliedby) Se $A = \pi(B)$, con B aperto saturo, allora $\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(\pi(B)) = B$ (perché B è saturo) che è aperto in X , per cui A è aperto in X/\sim .

② È identico. \square

Osservazione 74. In realtà vale un enunciato più forte di quello della **Proposizione 2.24.5**, cioè:

$$\pi^{-1} : \{ \text{aperti di } X/\sim \} \rightarrow \{ \text{aperti saturi di } X \}$$

$$\pi : \{ \text{aperti saturi di } X \} \rightarrow \{ \text{aperti di } X/\sim \}$$

Le mappe π^{-1}, π descritte qui sopra sono bigezioni e l'una l'inversa dell'altra.

Esempio 52. Sia $X = [0, 1]$ e poniamo \sim su X tale che $x \sim y \iff x = y$ o $\{x, y\} \subseteq \{0, 1\}$ ^a.

Dal disegno di fianco: perché S^1 e non, ad esempio, $[0, 1]$?

Osservazione 75. “Quoziente di un compatto è compatto” e “Quoziente di un connesso è connesso” in quanto $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è continua e surgettiva e l’immagine continua di un compatto (risp. connesso) è compatta (risp. connessa).

Dunque

$$\begin{array}{cc} [0,1]/_{0\sim 1} & \cong & [0, 1) \\ \text{compatto} & & \text{non compatto} \end{array}$$

Dimostriamo che $[0,1]/_{0\sim 1} \cong S^1$.

Cerchiamo un’identificazione $f : [0, 1] \rightarrow S^1$: poniamo $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$. f è chiaramente continua, surgettiva e $f(t) = f(t') \iff t = t'$ o $\{t, t'\} \in \{0, 1\}$.

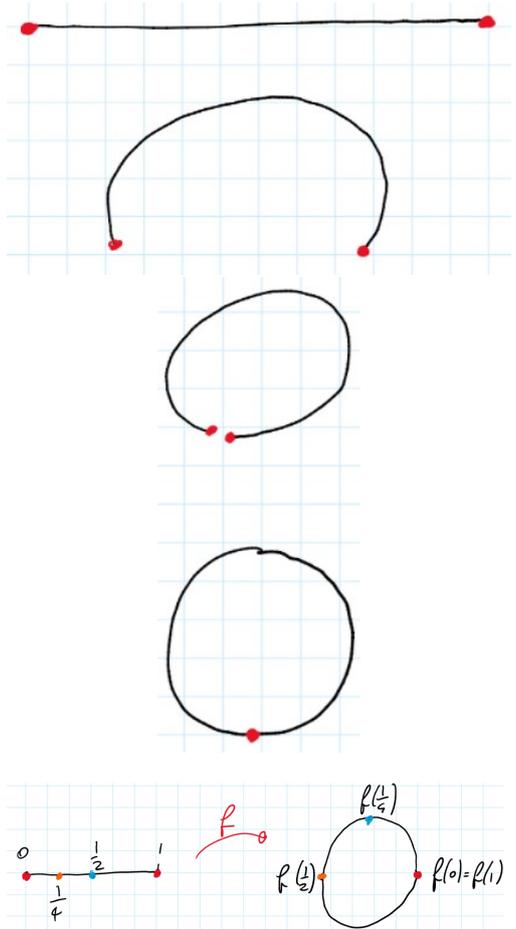
Perciò f induce $\bar{f} : [0,1]/\sim \rightarrow S^1$ continua e bigettiva.

Poiché $[0, 1]$ è compatto e S^1 è T_2 , f è chiusa (**Teorema 2.20.6**), dunque è un’identificazione e \bar{f} è un omeomorfismo.

In generale, se $A \subseteq X$, allora il quoziente X/\sim si indica con X/A , dove $x \sim y \iff x = y$ o $x, y \in A$.

Si dice che X/A è ottenuto da X “collassando A ad un punto”.

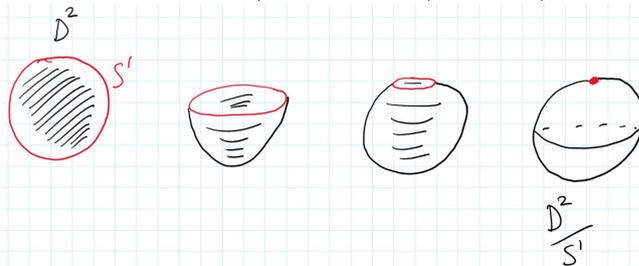
^aCioè l’unica classe di equivalenza con più di un punto è $\{0, 1\}$.



Teorema 2.24.6. Detti $D^n = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq 1\}$ e $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \|p\| = 1\}$, $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

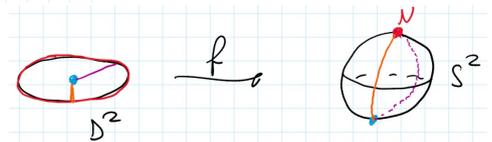
Dimostrazione. Per $n = 1$, abbiamo $[-1,1]/\{-1,1\} \cong S^1$ (già visto).

Per $n = 2$, abbiamo



Per dimostrare formalmente la tesi, costruiamo l’identificazione $f : D^n \rightarrow S^n$. Mandiamo raggi di D^2 in meridiani di S^2 .

$$f(v) = (\lambda v, g(\|v\|))$$



dove λv determina le prime n coordinate e $g(\|v\|)$ l’ $(n+1)$ -esima coordinata, cioè l’“altezza”, $g(0) = -1$ (cioè il centro di D^2 va nel Polo Sud) e $g(1) = 1$ (cioè S^1 va nel Polo Nord).

Per esempio, $g(\|v\|) = 2\|v\| - 1$, ma, per facilitare i conti, scegliamo $g(\|v\|) = 2\|v\|^2 - 1$.

Dunque $f(v) = (\lambda v, 2\|v\|^2 - 1)$. Calcoliamo adesso λ in modo che $\|f(v)\| = 1$, cioè $\|f(v)\|^2 = 1$:

$$\|f(v)\|^2 = \lambda^2\|v\|^2 + 4\|v\|^4 - 4\|v\|^2 + 1 = 1 \implies \lambda^2 + 4\|v\|^2 - 4 = 0 \implies \lambda^2 = 4 - 4\|v\|^2$$

Scegliamo $\lambda \geq 0 \implies \lambda = 2\sqrt{1 - \|v\|^2}$, da cui $f : D^n \rightarrow S^n$, $f(v) = (2v\sqrt{1 - \|v\|^2}, 2\|v\|^2 - 1)$. Sulla base del significato geometrico di f , è ovvio che f sia surgettiva e $f(v) = f(v') \iff v = v'$ o $\|v\| = \|v'\| = 1$. Dunque f induce $\bar{f} : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ bigettiva e continua (f è continua). Infine, \bar{f} è omeomorfismo perché f è chiusa, per il **Teorema 2.20.6** dato che D^n è compatto e S^n è T_2 . \square

2.24.1 Quozienti per azioni di gruppi

Abbiamo ottenuto S^1 da $[0, 1]$ collassando gli estremi. È possibile ottenere S^1 con una costruzione analoga ma diversa a partire da tutto \mathbb{R} .

Poniamo $X = \mathbb{R}$ e $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.



Notiamo che $[0, 1]$ contiene un insieme di rappresentanti per \sim e notiamo che 0 e 1 sono rappresentanti della stessa classe, mentre i punti di $(0, 1)$ appartengono a classi a due a due distinte (e distinte anche da $[0] = [1]$). Un insieme di rappresentanti sarebbe dato ad esempio da $[0, 1)$ o $(0, 1]$. C'è perciò una bigezione naturale $[0, 1]/\{0, 1\} \cong \mathbb{R}/\sim$. Questa bigezione è anche un omeomorfismo, per cui in effetti

$$\mathbb{R}/\sim \cong S^1$$

Potremmo dimostrarlo per vie elementari, ma svilupperemo una teoria che si adatta perfettamente a studiare quozienti come \mathbb{R}/\sim .

Definizione 2.24.4. Siano X un insieme e G un gruppo. Un'azione (sinistra) di G su X è una funzione $\varphi : G \times X \rightarrow X$ tale che

- $\varphi(e, x) = x \ \forall x \in X$ ($e \in G$ è l'identità);
- $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(g \cdot h, x) \ \forall g, h \in G$ e $\forall x \in X$.

Di norma, $\varphi(g, x)$ si indica con $g \cdot x$ e i due assiomi diventano

- $e \cdot x = x \ \forall x \in X$;
- $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x \ \forall g, h \in G$ e $\forall x \in X$.

$\forall g \in G$ la mappa $\ell_g : X \rightarrow X$, $x \mapsto g \cdot x$, poiché $\ell_g \circ \ell_{g^{-1}} = \ell_e = \ell_{g^{-1}} \circ \ell_g = \text{Id}_X$, è una bigezione e

gli assiomi ci dicono che $\psi : G \rightarrow \text{Permutazioni}(X)$, $g \mapsto \ell_g$ è un omomorfismo di gruppi.

Vocabolario: ① L'azione si dice **fedele**, se $\text{Ker } \psi = \{e\}$.

② $\forall x \in X \ \text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ è un sottogruppo di G .

③ L'azione si dice **libera**, se $\forall x \in X \ \text{Stab}(x) = \{e\}$, cioè se $g \neq e \implies g \cdot x \neq x \ \forall x \in X$.

(Chiaramente libera \implies fedele.)

④ $\forall x \in X$ l'**orbita** di x è $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

⑤ L'azione si dice **transitiva**, se ha una sola orbita, cioè se $\forall x, y \in X \ \exists g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.

Per ⑤ abbiamo già usato il seguente

Fatto 2.24.7. Le orbite forniscono una partizione di X , cioè, se due orbite si intersecano, allora coincidono. Un altro modo di dire questa cosa è il seguente: posto $x \sim y \iff \exists g \in G$ tale che $g \cdot x = y$, la relazione \sim è di equivalenza.

Infatti,

a) $x \sim x$, in quanto $e \cdot x = x \ \forall x \in X$.

b) $x \sim y \implies \exists g \in G$ tale che $g \cdot x = y \implies g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot y \implies (g^{-1} \cdot g) \cdot x = g^{-1} \cdot y \implies e \cdot x = g^{-1} \cdot y \implies x = g^{-1} \cdot y \implies y \sim x$.

c) $x \sim y$ e $y \sim z \implies \exists g, h$ tali che $gx = y$ e $hy = z \implies (hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot y = z \implies x \sim z$.

Definizione 2.24.5. Indichiamo con X/G (i puristi userebbero $G \backslash X$) lo spazio X/\sim , ovvero lo **spazio delle orbite dell'azione**.

D'ora in poi tratteremo il caso X topologico e assumeremo sempre che l'azione sia continua, cioè che $\forall g \in G$ la mappa $\ell_g : X \rightarrow X$ sia continua. Poiché anche $\ell_{g^{-1}} = (\ell_g)^{-1}$ è continua, questo implica che ℓ_g sia un omeomorfismo $\forall g \in G$. Doteremo infine X/G della topologia quoziente.

Esempio 53. $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ poniamo $n \cdot x = x + n$ ⁹⁰.

\mathbb{R}/\mathbb{Z} è proprio l'esempio iniziale: $x \sim y \iff \exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $n \cdot x = y \iff \exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $x + n = y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Attenzione! In questo esempio, per caso (un caso che però capita non raramente), $G \subseteq X$ (perché $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$), per cui \mathbb{R}/\mathbb{Z} potrebbe voler dire sia lo spazio ottenuto da \mathbb{R} collassando \mathbb{Z} ad un punto, sia il quoziente di \mathbb{R} per l'azione di \mathbb{Z} tramite traslazioni. Sono due cose diversissime.

Fissiamo un'azione di G su uno spazio topologico X e studiamo $\pi : X \rightarrow X/G$.

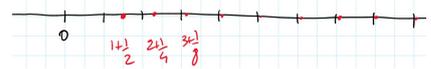
Osservazione 76. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è saturo \iff è G -invariante, cioè $G \cdot A = A$.

Infatti, per definizione, A è saturo \iff è unione di orbite \iff è G -invariante.

Proposizione 2.24.8. La proiezione $\pi : X \rightarrow X/G$ è sempre aperta.

Dimostrazione. Sia A aperto in X . $\pi(A)$ è aperto in $X/G \iff \pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto in X , ma $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A$, in quanto $z \in \pi^{-1}(\pi(A)) \iff \pi(z) \in \pi(A) \iff \exists x \in A$ tale che $\pi(z) = \pi(x) \iff \exists x \in A$ e $g \in G$ tali che $z = g \cdot x \iff \exists g \in G$ tale che $z \in g \cdot A \iff z \in \bigcup_{g \in G} g \cdot A$. A è però aperto e $g \in G$ agisce come un omeomorfismo di X , per cui $g \cdot A$ è un aperto di $X \forall g \in G$. Dunque $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A$ è aperta in quanto unione di aperti. \square

La stessa dimostrazione mostra che, se G è finito, $\pi : X \rightarrow X/G$ è anche chiusa. In generale però non lo è. Ad esempio, siano $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$ come sopra e sia $C = \{n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.



Dimostrazione. C è chiuso, ma $\pi(C)$ non lo è, in quanto $\pi^{-1}(\pi(C))$ contiene $2^{-n} \forall n \geq 1$ ⁹¹. Se $\pi^{-1}(\pi(C))$ fosse chiuso, poiché $2^{-n} \in \pi^{-1}(\pi(C)) \forall n \geq 1$, allora avremmo $0 \in \pi^{-1}(\pi(C))$, ma questo è falso, dunque $\pi(C)$ non è chiuso. \square

Purtroppo le proprietà di separazione non passano al quoziente nemmeno per quozienti “buoni” come quelli derivanti da azioni di gruppo.

Lemma 2.24.9. X/\sim è $T_1 \iff$ ogni classe di equivalenza è chiusa in X .

Dimostrazione. X/\sim è $T_1 \iff$ ogni $P \in X/\sim$ è chiuso $\iff \forall P \in X/\sim$, $\pi^{-1}(P) = [P] \subseteq X$ è chiuso. \square

Ad esempio, se facciamo agire \mathbb{Q} su \mathbb{R} tramite traslazioni, \mathbb{R}/\mathbb{Q} non è T_1 , in quanto l'orbita di 0 in \mathbb{R} è \mathbb{Q} che non è chiuso.

Dati $X = \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, matrici 2×2 reali con la topologia indotta da $\mathbb{R}^4 \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, e $G = \mathcal{GL}(2, \mathbb{R})$, con l'azione $G \times X \rightarrow X$, $(A, M) \mapsto AMA^{-1}$, l'orbita di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è chiusa perché contiene $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall \varepsilon > 0$, ma non contiene $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nasce la necessità di capire quando X/G sia almeno T_2 o comunque ammetta una buona descrizione.

Definizione 2.24.6. Un'azione $G \times X \rightarrow X$ si dice:

- ① **vagante**, se $\forall x \in X \exists U \in I(x)$ ⁹² tale che $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ sia finito;
- ② **propriamente discontinua**, se $\forall x \in X \exists U \in I(x)$ tale che $g \cdot U \cap U = \emptyset \forall g \neq e$;
- ③ **propria**, se $\forall K \subseteq X$ compatto l'insieme $\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ è finito.

Ovviamente, propriamente discontinua \implies vagante e libera.

Inoltre valgono i seguenti **Fatti** (che sono lasciati come semplici **Esercizi**):

⁹⁰ \mathbb{Z} agisce su \mathbb{R} tramite traslazioni intere.

⁹¹Poiché $x_n = n + 2^{-n} \in C \implies (-n) \cdot x_n \in \pi^{-1}(\pi(C))$, ma $(-n) \cdot x_n = n + 2^{-n} - n = 2^{-n}$.

⁹²Insieme degli intorni di X .

Fatto 2.24.10. Se X è T_2 , allora propriamente discontinua \iff libera e vagante.

Fatto 2.24.11. Se X è localmente compatto (cioè ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni compatti), allora

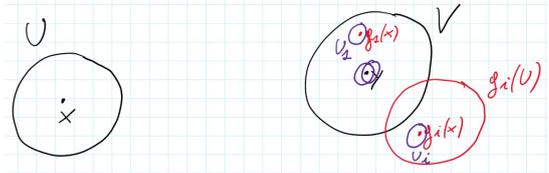
$$\text{propria} \iff \forall x, y \in X \exists U \in I(x) \text{ e } V \in I(y) \text{ tali che } \{g \in G \mid g \cdot U \cap V \neq \emptyset\} \text{ è finito}$$

La nozione di azione propriamente discontinua gioca un ruolo chiave nella teoria dei rivestimenti. Per ora ci interessa soprattutto il seguente

Teorema 2.24.12. Dati X localmente compatto e T_2 e $G \times X \rightarrow X$ un'azione propria, X/G è T_2 .

Dimostrazione. Prese $[x], [y] \in X/G$ classi distinte, siano $x, y \in X$ rappresentanti. Poiché X è T_2 , esistono intorni disgiunti $U \ni x$ e $V \ni y$ che, per locale compattezza, possiamo assumere compatti. Poiché l'azione è propria, se poniamo $K = U \cup V$, allora $\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ è finito (K è compatto in quanto unione finita di compatti), per cui in particolare $\{g \in G \mid g \cdot U \cap V \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\}$ (questo mostra (\implies) del **Fatto 2.24.11**).

Osserviamo che $\forall i = 1, \dots, n$ $g_i \cdot x \neq y$ (in quanto $[x] \neq [y]$), dunque, poiché X è T_2 , troviamo $U_i \in I(g_i \cdot x)$ e $V_i \in I(y)$ tali che $U_i \cap V_i = \emptyset$. Poniamo $U' = U \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1} \cdot U_i$.



Ricordiamo che g_i^{-1} è un omeomorfismo, dunque, poiché U_i è un intorno di $g_i \cdot x$, $g_i^{-1} \cdot U_i$ è un intorno di x . Dunque U' , essendo intersezione finita di intorni di X , è un intorno di x .

Poniamo anche $V' = V \cap \bigcap_{i=1}^n V_i$ che, analogamente, è un intorno di y .

Poiché π è aperta (visto che si tratta del quoziente per un'azione di gruppo), $\pi(U')$ e $\pi(V')$ sono intorni di $[x]$ e $[y]$ rispettivamente. Per concludere dobbiamo mostrare che $\pi(U') \cap \pi(V') = \emptyset$.

$$\pi(U') \cap \pi(V') \neq \emptyset \implies \pi^{-1}(\pi(U')) \cap \pi^{-1}(\pi(V')) \neq \emptyset \implies \left(\bigcup_{g \in G} g \cdot U' \right) \cap \left(\bigcup_{h \in G} h \cdot V' \right) \neq \emptyset$$

$\implies \exists g, h \in G$ tali che $g \cdot U' \cap h \cdot V' \neq \emptyset \implies h^{-1}g \cdot U' \cap V' \neq \emptyset$. Poiché $U' \subseteq U$ e $V' \subseteq V$, $h^{-1}g \cdot U \cap V \neq \emptyset \implies \exists i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $h^{-1}g = g_i$ (i g_i sono quelli determinati sopra). Dunque $g_i \cdot U' \cap V' \neq \emptyset$, ma $U' \subseteq g_i^{-1} \cdot U_i$ e $V' \subseteq V_i \implies g_i \cdot g_i^{-1} \cdot U_i \cap V_i \neq \emptyset \implies U_i \cap V_i \neq \emptyset$ \nmid per come erano stati scelti U_i e V_i . \square

Vediamo alcuni esempi di applicazione del **Teorema 2.24.12**:

Esempio 54. Dati $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}$, consideriamo $n \cdot x = x + n \forall n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

\mathbb{R} è localmente compatto⁹³ ed è T_2 . Inoltre l'azione è propria: se $K \subseteq \mathbb{R}$, allora $\exists M > 0$ tale che $K \subseteq [-M, M]$. Dunque $n \cdot K \cap K \neq \emptyset \implies [-M + n, M + n] \cap [-M, M] \neq \emptyset \implies M \geq -M + n$ e $M + n \geq -M \implies n \leq 2M$ e $n \geq -2M$, cioè $-2M \leq n \leq 2M$, perciò gli n che verificano questa condizione sono finiti. Dunque \mathbb{R}/\mathbb{Z} è T_2 .

Esempio 55. Dati $G = \mathbb{Z}^k$ e $X = \mathbb{R}^k$, consideriamo $(n_1, \dots, n_k) \cdot (x_1, \dots, x_k) = (x_1 + n_1, \dots, x_k + n_k)$.

Anche questa azione è propria e $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ è T_2 .

Definizione 2.24.7. Data $G \times X \rightarrow X$ azione di gruppo, un **dominio fondamentale** per l'azione è un sottoinsieme $D \subseteq X$ tale che

1. $\overline{D} = D$ (in particolare, D è chiuso);
2. $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$ (cioè $\pi|_D : D \rightarrow X/\sim$ è surgettiva);

⁹³ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \mid n \geq 1\}$ è un S.F.I. compatti di x .

3. $g \cdot \dot{D} \cap \dot{D} = \emptyset \ \forall g \neq 1$ ⁹⁴ (dunque cioè $\pi|_{\dot{D}} : \dot{D} \rightarrow X/\sim$ è iniettiva);

4. $\{g \cdot D \mid g \in G\}$ è una famiglia localmente finita.

Esempio 56. L'azione di \mathbb{Z}^n su \mathbb{R}^n per traslazioni descritta sopra ammette il cubo $[0, 1]^n$ come dominio fondamentale. Se $n = 1$, allora $[0, 1]$ è un dominio fondamentale per l'azione di \mathbb{Z} su \mathbb{R} .

Teorema 2.24.13. Siano X localmente compatto, $G \times X \rightarrow X$ azione di gruppo e D dominio fondamentale per l'azione, allora

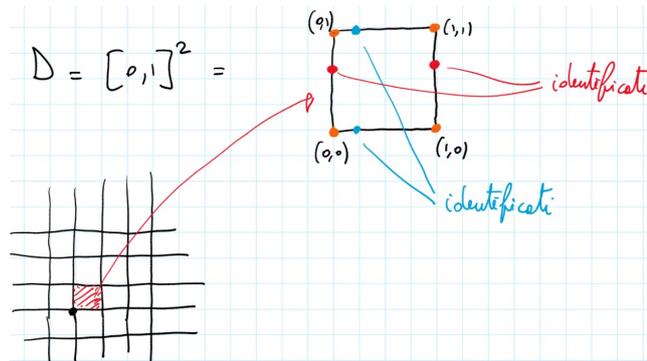
① se X è T_2 , anche X/\sim è T_2 .

② $X/\sim \cong D/\sim'$, dove \sim' è la restrizione di \sim a D tale che $p, q \in D$ sono \sim' -equivalenti \iff sono \sim -equivalenti.

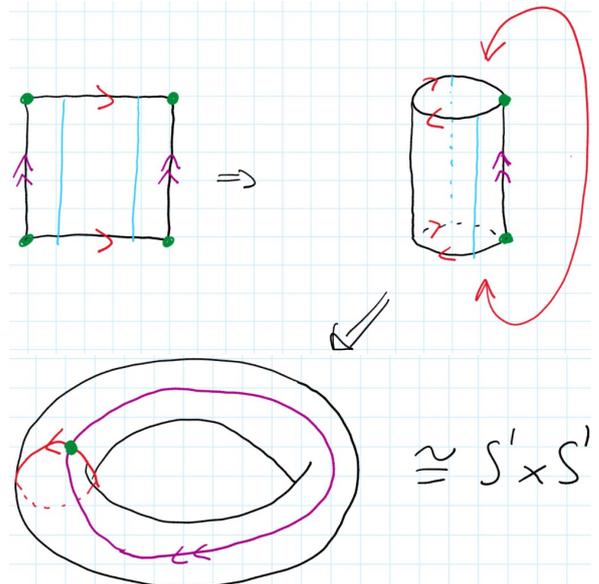
Corollario 2.24.14. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong [0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$.

Corollario 2.24.15. $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ (e dunque anche $[0, 1]^n/\sim' \cong (S^1)^n$).

Se $n = 2$:



Le identificazioni su $\partial[0, 1]^2$ si descrivono graficamente con delle frecce:

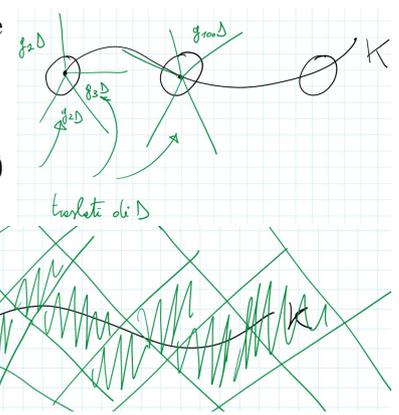


Dimostrazione. (**Teorema 2.24.13**) ① Dato X T_2 , dimostriamo che X/G lo è, se l'azione ammette un dominio fondamentale D . Poiché X è localmente compatto, per il **Teorema 2.24.12**, basta vedere che l'azione è propria. Sia $K \subseteq X$ compatto. Mostriamo che $\exists g_1, \dots, g_n$ tali che $K \subseteq g_1 \cdot D \cup \dots \cup g_n \cdot D$ e $g \cdot D \cap K = \emptyset$, se $g \neq g_1, \dots, g_n$. Infatti $\forall x \in K$, poiché $\{g \cdot D \mid g \in G\}$ è localmente finita, $\exists U_x \in I(x)$ aperto tale che $|\{g \in G \mid g \cdot D \cap U_x \neq \emptyset\}| < +\infty$. Per compattezza, $K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_s}$, dove x_1, \dots, x_s è un numero finito di punti di K .

Dunque $K \cap g \cdot D \neq \emptyset \implies \exists i = 1, \dots, s$ tale che $U_{x_i} \cap g \cdot D \neq \emptyset$, per cui g appartiene ad un'unione finita di insiemi finiti, $|\{g \in G \mid g \cdot D \cap K \neq \emptyset\}| < +\infty \implies \{g \in G \mid g \cdot D \cap K \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\}$.

⁹⁴ $1 = e =$ identità di G .

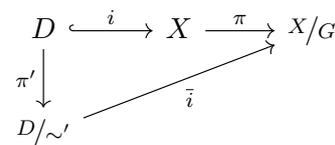
Poiché $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$, chiaramente $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot D$ e, per costruzione, se $g \neq g_i \forall i = 1, \dots, n$, allora $g \cdot D \cap K = \emptyset$. Ora,



$$g \cdot K \cap K \neq \emptyset \implies K \cap g \cdot \left(\bigcup_{i=1}^n g_i \cdot D \right) \neq \emptyset \implies K \cap \left(\bigcup_{i=1}^n g \cdot g_i \cdot D \right) \neq \emptyset$$

$\implies \exists i = 1, \dots, n$ tale che $K \cap g \cdot g_i \cdot D \neq \emptyset \implies \exists j = 1, \dots, n$ tale che $g \cdot g_i = g_j \implies g = g_i^{-1} g_j$ per qualche $i, j = 1, \dots, n$. Dunque, se $g \cdot K \cap K \neq \emptyset$, g deve variare in $\{g_i^{-1} g_j, i = 1, \dots, n\}$ che è un insieme finito. Questo prova che l'azione è propria. Per compattezza, solo un numero finito di traslati coprono K :

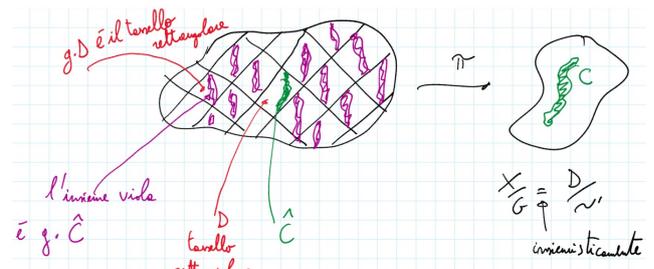
② La composizione $\pi \circ i : D \rightarrow X/G$ è continua (composizione di mappe continue) ed induce perciò $\bar{i} : D/\sim' \rightarrow X/G$ continua ⁹⁵:



Poiché \sim' è la restrizione di \sim , \bar{i} è iniettiva.

Visto che $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$, $\pi \circ i$ è surgettiva, dunque lo è anche \bar{i} , che è perciò bigettiva e continua.

Rimane da vedere che \bar{i} è un omeomorfismo: basta verificare che sia aperta (o chiusa). Il fatto chiave è che $\{g \cdot D \mid g \in G\}$ è un ricoprimento fondamentale, in quanto ogni $g \cdot D$ è chiuso (lo è D e g agisce come un omeomorfismo di X , dunque lo è anche $g \cdot D$) e $\{g \cdot D \mid g \in G\}$ è localmente finita.



Vediamo che \bar{i} è, ad esempio, chiusa.

Siano $\pi : X \rightarrow X/G$ e $\pi' : D \rightarrow D/\sim'$ le proiezioni e sia $C \subseteq D/\sim'$ chiuso. Dobbiamo verificare che anche $\bar{i}(C)$ sia chiuso in X/G . Per ipotesi, $C \subseteq D/\sim'$ chiuso $\implies (\pi')^{-1}(C) \subseteq D$ è un chiuso di D , chiamiamolo $\hat{C} = (\pi')^{-1}(C)$. Vogliamo dimostrare che $\bar{i}(C)$ è chiuso in X/G , cioè $\pi^{-1}(\bar{i}(C)) \subseteq X$ è chiuso in X , ma $\pi^{-1}(\bar{i}(C)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot \hat{C}$.

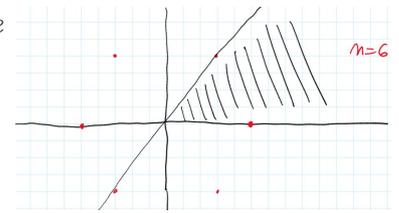
Dobbiamo perciò mostrare che $\tilde{C} = \bigcup_{g \in G} g \cdot \hat{C}$ è chiuso in X .

$\forall g \in G$ $g \cdot \hat{C}$ è chiuso in $g \cdot D$, quindi, dato che $\{g \cdot D \mid g \in G\}$ è una famiglia localmente finita (per definizione di dominio fondamentale), anche $\{g \cdot \hat{C} \mid g \in G\}$ è una famiglia di chiusi localmente finita e dunque \tilde{C} è chiuso per il **Teorema 2.14.3**. \square

Esempio 57. Se $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'azione

$$[k] \cdot P = R_{\frac{2\pi k}{n}} \cdot P, \text{ dove } R_{\frac{2\pi k}{n}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \text{ allora}$$

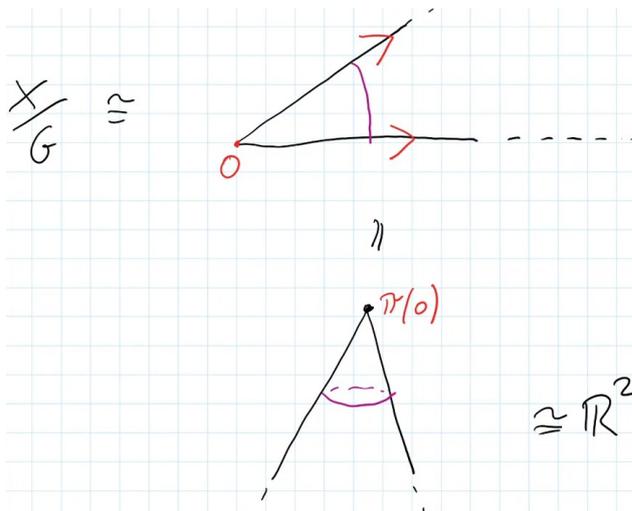
$$\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{R}^2$$



Dimostrazione. Sia $D = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid P = R(\cos \theta, \sin \theta), R \geq 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{3}]\}$ ⁹⁶.

⁹⁵Vedasi **Teorema 2.24.2**.
⁹⁶Estremi inclusi perché vogliamo un chiuso.

La restrizione di \sim a D identifica soltanto $(x, 0)$ a $(x \cos \frac{\pi}{3}, x \sin \frac{\pi}{3})$, al variare di $x \geq 0$. Dunque



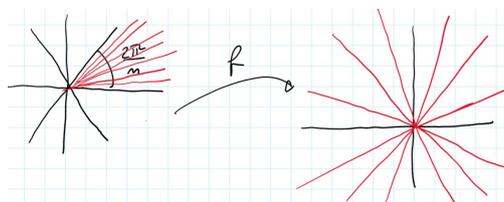
Modo formale di dimostrare che $\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{R}^2$ ⁹⁷.

Tornando all'esempio, bisogna cercare una $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che “passi al quoziente” dando l'omeomorfismo cercato.

Ad esempio, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(P) = \begin{cases} R(\cos n\theta, \sin n\theta) & \text{se } P = R(\cos \theta, \sin \theta), R > 0 \\ 0 & \text{se } P = 0 \end{cases}$.

f è ben definita e continua (bisogna verificare a mano la continuità in 0) ed effettivamente

$$f(P) = f(P') \iff P \sim P'$$

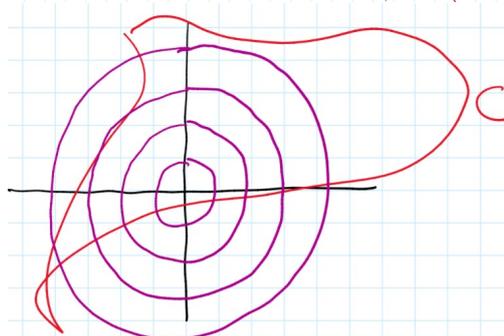


Poiché f è surgettiva, f induce una mappa continua e bigettiva $\bar{f} : \mathbb{R}^2/G \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Per concludere, bisogna verificare che f sia un'identificazione. Ad esempio, si può mostrare che è chiusa: se $C \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso e poniamo $C_n = C \cap \{P \in \mathbb{R}^2 \mid n \leq \|P\| \leq n+1\}$, allora

$$f(C) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(C_n)$$

Ogni C_n è chiuso (intersezione di chiusi) ed è anche limitato, dunque è compatto. Perciò anche $f(C_n)$ è compatto e dunque chiuso. Purtroppo l'unione arbitraria di chiusi non è chiusa, ma un'unione localmente finita lo è! Poiché $\forall n \in \mathbb{N} f(C_n) \subseteq \{P \in \mathbb{R}^2 \mid n \leq \|P\| \leq n+1\}$, $\{f(C_n)\}$ è una famiglia localmente finita. Dunque f è chiusa. Abbiamo così concluso che $\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{R}^2$. □



⁹⁷Senza dominio fondamentale, in altri casi è utilissimo, ma qui non tanto. Ad esempio è utilissimo quando D è compatto ma X non lo è: per identificare “chi sia” D/\sim , possiamo usare i teoremi che governano mappe da compatti in spazi T_2 .

Esercizi I settimana (Secondo semestre)

Esercizio 53. Siano X uno spazio topologico, \sim una relazione di equivalenza su X e $\pi : X \rightarrow X/\sim$ la proiezione al quoziente. Sia A un sottoinsieme di X e sia \sim' la relazione di equivalenza su A definita restringendo \sim , ovvero per ogni $a_1, a_2 \in A$ poniamo $a_1 \sim' a_2$ se e solo se $a_1 \sim a_2$. Supponiamo inoltre che la restrizione di π ad A sia surgettiva.

(1) Si mostri che l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce una bigezione continua $\bar{i} : A/\sim' \rightarrow X/\sim$.

(2) Si dica se A/\sim' e X/\sim siano omeomorfi.

Dimostrazione. (1) L'inclusione $A \xrightarrow{i} X$ è continua \implies anche $\pi \circ i$ lo è (perché π è continua). Osserviamo che $\pi \circ i(a_1) = \pi \circ i(a_2) \iff a_1 \sim a_2 \iff a_1 \sim' a_2$. Dunque $\pi \circ i$ induce una mappa continua e iniettiva $A/\sim' \xrightarrow{\bar{i}} X/\sim$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi \circ i} & X/\sim \\ \downarrow \pi' & \nearrow \bar{i} & \\ A/\sim' & & \end{array}$$

Poiché, inoltre, $\pi|_A$ è surgettiva $\implies \pi \circ i$ è surgettiva \implies anche \bar{i} è surgettiva $\implies \bar{i}$ è continua e bigettiva.

(2) Se $X = \mathbb{R}$, \sim è indotta dall'azione di \mathbb{Z} per traslazioni e $A = [0, 1)$, allora le ipotesi sono verificate e \sim' è la relazione banale⁹⁸. Dunque $A/\sim' \cong A \cong [0, 1)$.

Notiamo che la composizione $[0, 1] \xrightarrow{j} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\sim$ è continua (composizione di continue) e surgettiva, ma $[0, 1]$ è compatto e l'immagine continua di un compatto è compatta, per cui \mathbb{R}/\sim è compatto, mentre $A/\sim' \cong [0, 1)$ non lo è. Perciò, in generale, $\bar{i} : A/\sim' \rightarrow X/\sim$ non è un omeomorfismo. \square

⁹⁸ $a_1 \sim' a_2 \iff a_1 = a_2$.

2.25 Topologia dei proiettivi

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , che d'ora in poi identifichiamo (almeno topologicamente) con \mathbb{R}^2 , dunque \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} . $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, $v \sim v' \iff v = \lambda v'$ $\lambda \in \mathbb{K}^*$, dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è uno spazio quoziente. È in particolare il quoziente per un'azione di gruppo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \cdot v \end{array}$$

Poiché \mathbb{R}^{n+1} (e dunque $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$) e \mathbb{C}^{n+1} (e dunque $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$) hanno la loro topologia Euclidea, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, che doteremo sempre della topologia quoziente, sono spazi topologici.

2.25.1 Caso reale

L'azione di \mathbb{R}^* su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ non è propria⁹⁹. È tuttavia ovvio che $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ incontra tutte le classi di equivalenza: $\forall v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ $v \sim \frac{v}{\|v\|} \in S^n$. Inoltre, $v, v' \in S^n$ sono equivalenti $\iff v = \lambda v'$, $\lambda \neq 0 \iff$ ¹⁰⁰ $v = \pm v'$, in quanto deve valere $\|v\| = \|\lambda v'\| = |\lambda| \cdot \|v'\|$, da cui $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$. Vogliamo dimostrare che in effetti:

Teorema 2.25.1. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n / \pm \text{Id}$.

Dimostrazione. Siano $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $h : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{v} S^n$ rispettivamente l'inclusione e la normalizzazione. Passando al quoziente rispettivamente su $S^n / \pm \text{Id}$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e definendo $S^n / \pm \text{Id} \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ \downarrow \pi' & & \nearrow \alpha \\ S^n / \pm \text{Id} & & \end{array}$$

α è continua per il **Teorema 2.24.2**.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{h} & S^n \xrightarrow{\pi'} S^n / \pm \text{Id} \\ \downarrow \pi & & \nearrow \beta \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & & \end{array}$$

Analogamente, β è continua.

Per quanto detto, α e β sono una l'inversa dell'altra, per cui sono omeomorfismi. \square

Corollario 2.25.2. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2 , compatto e connesso per archi (dunque connesso).

Dimostrazione. S^n è localmente compatto e T_2 e $\{\pm \text{Id}\}$ è un gruppo finito, dunque ogni sua azione è propria $\implies \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n / \pm \text{Id}$ è T_2 .

Inoltre, S^n è compatto e connesso per archi (se $n \geq 1$) per cui anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, essendone immagine continua, lo è. Se $n = 0$, $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ è un punto, che perciò è connesso per archi. \square

Teorema 2.25.3. Su $D^n = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1\}$, se \sim è definita da

$$v \sim v' \iff v = v' \text{ o } (\|v\| = \|v'\| = 1 \text{ e } v = -v'),$$

allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong D^n / \sim$.

⁹⁹ \mathbb{R}^* è un "gruppo continuo", dunque ci sono moltissimi elementi che "spostano poco" $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: ad esempio $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^*$ agisce stando vicino all'identità.

¹⁰⁰Poiché $\|v\| = \|v'\| = 1$.

Dimostrazione. Sia $H =$ emisfero Nord di $S^n = \{v = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \geq 0\}$, allora H è un dominio

fondamentale per l'azione di $\pm \text{Id}$ su S^n (molto facile).

La restrizione dell'azione di $\pm \text{Id}$ ad H identifica solo i punti di $\partial H = \{v = (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 = 0\}$ opposti. Se chiamiamo \sim' questa relazione di equivalenza, le mappe

$$\alpha : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & D^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}^a$$

e

$$\beta : \begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & H \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

^aProiezione nell'iperpiano $x_0 = 0$.

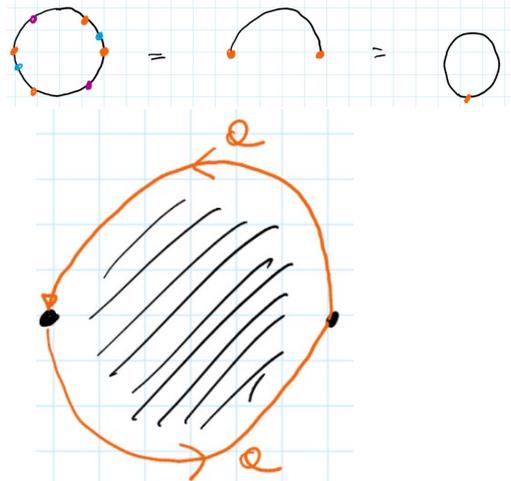
sono omeomorfismi che inducono al quoziente omeomorfismi $H/\sim' \xleftarrow{\bar{\alpha}} D^n/\sim \xrightarrow{\bar{\beta}}$, ma, per il **Teorema 2.24.13** e il **Teorema 2.25.1**, $H/\sim' \cong S^n/\pm \text{Id} \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong D^n/\sim$. \square

2.25.2 Proiettivi reali in dimensione bassa

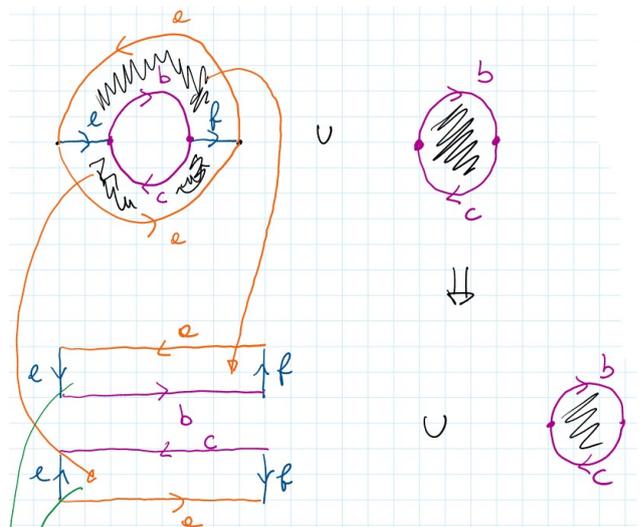
- $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ è un punto.
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong D^1/\sim$ (**Teorema 2.24.6**).

Se $n = 1$, \sim identifica i punti antipodali di $D^1 = [-1, 1]$, cioè 1 e -1, dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = [-1, 1]/\{1, -1\} \cong S^1$.

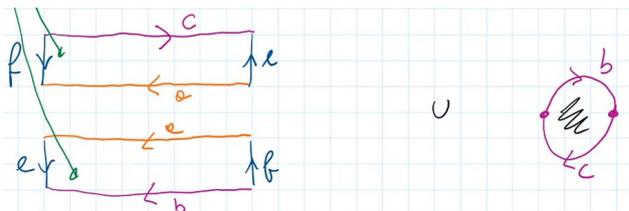
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong D^2/\sim$:



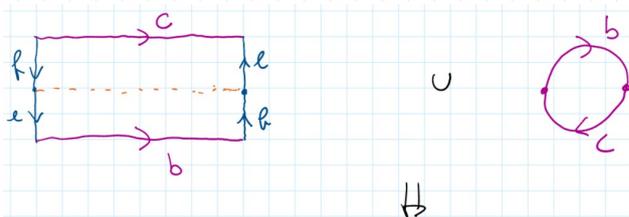
Rimuoviamo un disco concentrico, ricordandoci che dovremo riattaccarlo, ottenendo



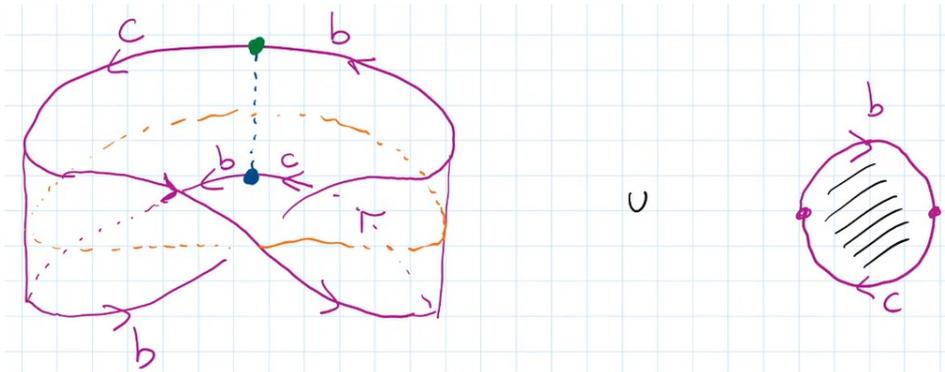
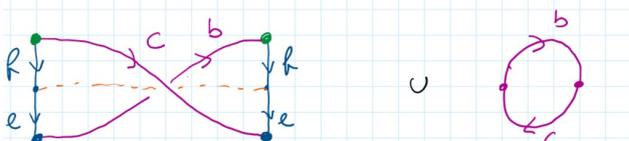
Ribaltiamo la striscia inferiore e scambiamole di posto, ottenendo



Incolliamo le strisce e applichiamo una mezza torsione alla nuova striscia ottenuta



Incollando i lati verticali della striscia come prescritto dalle frecce, poiché siamo in presenza di una mezza torsione, otteniamo un **nastro di Möbius**:



= Möbius incollato a D^2 lungo $\partial\text{Möbius}$, dove

$$\partial\text{Möbius} \cong \partial D^2 \cong S^1$$

2.25.3 Caso complesso

Proposizione 2.25.4. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è compatto e connesso per archi ¹⁰¹.

Dimostrazione. Posto su $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ il prodotto scalare standard, possiamo prendere

$$S^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} : \|v\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$\forall v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \ v \sim \frac{v}{\|v\|}$, dunque $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si restringe a

$$\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ surgettiva}$$

Poiché π è continua e S^{2n+1} è compatto e connesso per archi, anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ lo è. □

Teorema 2.25.5. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong S^{2n+1}/\sim'$, dove $v_1 \sim' v_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| = 1$, tale che $v_1 = \lambda v_2$.

Dimostrazione identica al caso precedente.

Se dotiamo $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ della naturale struttura di gruppo moltiplicativo e consideriamo l'azione $S^1 \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$, allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = S^{2n+1}/S^1$. Questa azione, al contrario del caso reale, NON è propria (per cui bisogna dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sia T_2 diversamente, per esempio a mano).

¹⁰¹Come $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, sostanzialmente per le stesse ragioni.

2.25.4 Proiettivi complessi in dimensione bassa

• $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ è un punto.

Teorema 2.25.6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è ricoperto da $n + 1$ carte affini:

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & U_i \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array} \quad i = 0, \dots, n$$

con $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i \neq 0\}$. Ora, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , allora J_i è un omeomorfismo da \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n in U_i (vedasi sotto). Nel caso $n = 1$, otteniamo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \underbrace{U_0}_{\text{carta affine}} \cup \underbrace{H_0}_{\text{punto all'infinito}}$, con $U_0 \cong \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$,

$H_0 = \{p\}$ e $p = [0 : 1]$. Abbiamo visto che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2 ed è possibile dimostrare che anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ lo è (ma attenzione: è un po' più difficile). Dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è compatto (vedasi sotto), T_2 e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{p\} \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è la compattificazione di Alexandroff di \mathbb{R}^2 che è S^2 (stiamo usando l'unicità di tale compattificazione per la quale serve la condizione T_2). \square

2.25.5 Ultime proprietà dei proiettivi

Proposizione 2.25.7. *Come detto sopra, le carte affini sono omeomorfismi con l'immagine e gli $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , sono aperti in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Vediamolo per U_0 (gli altri casi sono identici):

$U_0 = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_0 \neq 0\}$, per cui, se $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, allora

$$\pi^{-1}(U_0) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_0 \neq 0\} = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) \cap \{x_0 \neq 0\}$$

dunque $\pi^{-1}(U_0)$ è aperto in $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ e perciò U_0 è aperto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Consideriamo $\alpha : \mathbb{K}^n \rightarrow U_0$ e $\beta : U_0 \rightarrow \mathbb{K}^n$ rispettivamente la carta affine relativa a U_0 e la sua inversa, cioè $\alpha(x_1, \dots, x_n) = [1, x_1, \dots, x_n]$ e $\beta([x_0, \dots, x_n]) = (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. Per concludere, dobbiamo verificare che siano continue:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & U_0 \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (1, x) & \longmapsto & [1, x] \end{array}$$

Essendo composizione di funzioni continue, α è continua.

Per la continuità di β , usiamo la **proprietà universale**: se $\widetilde{U}_0 = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_0 \neq 0\}$,

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_0 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}^n \\ \downarrow & \nearrow \beta & \\ \widetilde{U}_0/\sim = U_0 & & \end{array}$$

$\varphi(x_0, \dots, x_n) = (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. Dalla continuità di φ segue quella di β , per la **proprietà universale** della topologia quoziente.

(C'è un dettaglio da sistemare: \widetilde{U}_0/\sim è in bigezione naturale con U_0 , ma perché la topologia quoziente di \widetilde{U}_0/\sim è uguale a quella di U_0 come sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$? Qui \widetilde{U}_0 è un aperto saturo...). \square

Definizione 2.25.1. *Uno spazio topologico X è una **varietà topologica n -dimensionale** (o **n -varietà topologica**) se*

1. $\forall P \in X \exists U$ intorno aperto di P omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n ;
2. X è T_2 ;
3. X è a base numerabile (alcuni autori omettono questa condizione).

Esempio 58. Abbiamo visto che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietà n -dimensionale (il fatto che sia a base numerabile è facile): è T_2 e ogni punto giace in un aperto affine $U_i = \{x_i \neq 0\}$ che è omeomorfo a \mathbb{R}^n .

Esempio 59. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà topologica $2n$ -dimensionale, in quanto $U_i = \{z_i \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

Esempio 60. S^n è una n -varietà topologica: è T_2 , è a base numerabile e le due proiezioni stereografiche¹⁰² mostrano che S^n è ricoperto da due aperti, ciascuno omeomorfo a \mathbb{R}^n .

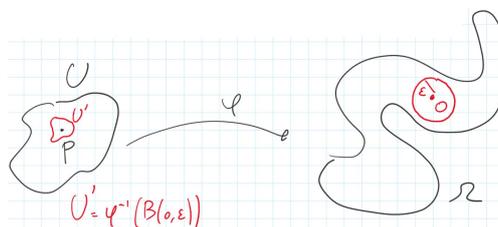
Proposizione 2.25.8. Sono fatti equivalenti:

- ① Ogni $P \in X$ ammette un intorno aperto omeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^n ;
- ② Ogni $P \in X$ ammette un intorno aperto omeomorfo a $B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$;
- ③ Ogni $P \in X$ ammette un intorno aperto omeomorfo a \mathbb{R}^n .

Infatti, vale $(\textcircled{2}) \iff (\textcircled{3})$ in quanto $B(0, \varepsilon) \cong \mathbb{R}^n$ (ad esempio tramite $x \mapsto \frac{x}{\varepsilon - \|x\|}$);

$(\textcircled{2}) \implies (\textcircled{1})$ è ovvio, perché $B(0, \varepsilon)$ è un aperto di \mathbb{R}^n ;

$(\textcircled{1}) \implies (\textcircled{2})$ dato $U \cong \Omega$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, possiamo traslare Ω in modo che l'omeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \Omega$ sia tale che $\varphi(P) = 0$. Poiché Ω è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ e ora poniamo $U' = \varphi^{-1}(B(0, \varepsilon))$ che è aperto in X (aperto in U in quanto φ è omeomorfismo, che è aperto in X) e $U' \cong B(0, \varepsilon)$.



Domanda: la condizione 1. nella **Definizione 2.25.1** (cioè l'essere localmente omeomorfi a \mathbb{R}^n) implica la 2. (cioè essere T_2)?

Risposta: no, come mostra il seguente esercizio.

¹⁰²Togliendo il polo Nord e il polo Sud.

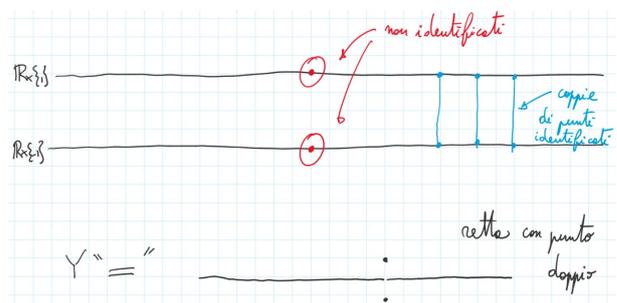
Esercizi II settimana

Esercizio 56. Sia $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ e si consideri la relazione di equivalenza su X data da

$$(x, \varepsilon) \sim (y, \varepsilon') \text{ se e solo se } (x, \varepsilon) = (y, \varepsilon') \text{ oppure } x = y \text{ e } x \neq 0 \text{ (e dunque anche } y \neq 0)$$

Sia infine $Y = X/\sim$.

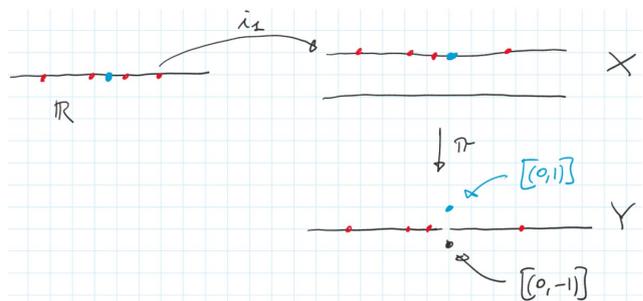
- ① Si mostri che Y è T_1 ma non T_2 .
- ② Si mostri che ogni punto di Y ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R} .



Dimostrazione. ② Sia $i_1 : \mathbb{R} \rightarrow X$
 $x \mapsto (x, 1)$. Diciamo che, se $\pi : X \rightarrow Y$ è la proiezione al quoziente,

allora $\pi \circ i_1 : \mathbb{R} \rightarrow Y$ induce un omeomorfismo tra \mathbb{R} e $\pi \circ i_1(\mathbb{R}) = Y \setminus \{(0, -1)\}$, che è un aperto di Y . Verifichiamo che $\pi \circ i_1(\mathbb{R})$ sia aperto: infatti, $\pi^{-1}(\pi(i_1(\mathbb{R}))) = X \setminus \{(0, -1)\}$ è aperto in X (X è T_1 in quanto sottospazio di \mathbb{R}^2). Ora, la mappa

$$h : X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \varepsilon) \mapsto x \text{ passa al quoziente inducendo} \\ \bar{h} : Y \rightarrow \mathbb{R} \\ [x, \varepsilon] \mapsto x$$



Poiché h è continua, anche \bar{h} lo è e $\bar{h}|_{Y \setminus \{(0, -1)\}} : Y \setminus \{(0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}$ è chiaramente l'inversa insiemistica di $\pi \circ i_1$, che perciò è un omeomorfismo tra \mathbb{R} e $Y \setminus \{(0, -1)\}$.

(Il fatto che $\pi \circ i_1$ sia continua è ovvio in quanto sia π che i_1 sono continue.)

Analogamente, se $i_{-1} : \mathbb{R} \rightarrow X$
 $x \mapsto (x, -1)$, allora $\pi \circ i_{-1} : \mathbb{R} \rightarrow Y \setminus \{(0, 1)\}$ è un omeomorfismo su un aperto di Y . Dunque

$$Y = (Y \setminus \{(0, -1)\}) \cup (Y \setminus \{(0, 1)\})$$

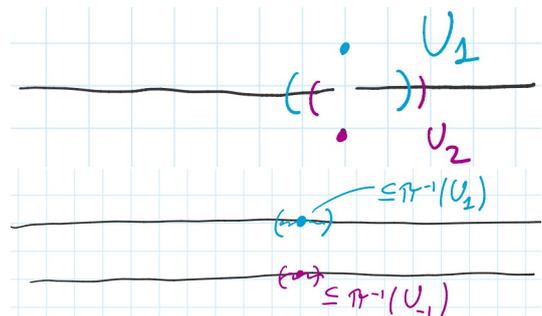
è ricoperto da aperti omeomorfi a \mathbb{R} .

① Il fatto che Y sia T_1 lo abbiamo già visto sopra.

Siano U_1 un aperto di Y che contiene $[(0, 1)]$ e U_{-1} un aperto di Y che contiene $[(0, -1)]$.

Quindi, $\pi^{-1}(U_1)$ è un aperto di X che contiene $\pi^{-1}([(0, 1)]) = (0, 1)$ e dunque contiene un sottoinsieme della forma $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{1\} \subseteq X$.

Analogamente, $\pi^{-1}(U_{-1})$ contiene un sottoinsieme del tipo $(-\varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-1}) \times \{-1\} \subseteq X$.



Detto $\delta = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}\}$, abbiamo $(\frac{\delta}{2}, 1) \in \pi^{-1}(U_1)$ e $(\frac{\delta}{2}, -1) \in \pi^{-1}(U_{-1})$, per cui

$$\left[\left(\frac{\delta}{2}, 1 \right) \right] = \left[\left(\frac{\delta}{2}, -1 \right) \right] \in U_1 \cap U_{-1}$$

che perciò non possono essere disgiunti. □

GRUPPO FONDAMENTALE E RIVESTIMENTI

3.1 Teoria dell'omotopia

Domanda fondamentale della topologia: dati due spazi X e Y , sono omeomorfi?

Per distinguere due spazi non omeomorfi, abbiamo usato invarianti come connessione, compattezza, assiomi di separazione, ecc... Questo approccio però difficilmente risponde a

domande come: $S^2 \stackrel{?}{\cong} S^1 \times S^1$

Sono entrambi compatti, connessi, metrizzabili, non sono sconnessi da alcun sottoinsieme finito, ... Sono omeomorfi? No, ma, per dimostrarlo, serve la **Teoria dell'omotopia**.



Definizione 3.1.1. Date $f, g : X \rightarrow Y$ mappe continue, un'**omotopia** tra f e g è una mappa continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$. Dato $s \in [0, 1]$, si indica con $H_s : X \rightarrow Y$ la mappa $H_s(x) = H(x, s)$ tale che $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Se una tale H esiste, allora f e g si dicono **omotope** e si scrive $f \sim g$.

Proposizione 3.1.1. Sull'insieme $C(X, Y) = \{\text{funzioni continue da } X \text{ in } Y\}$ "essere omotope" è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. ① $f \sim f$: basta prendere $H(x, s) = f(x) \forall (x, s) \in X \times [0, 1]$ che è continua, se f lo è.

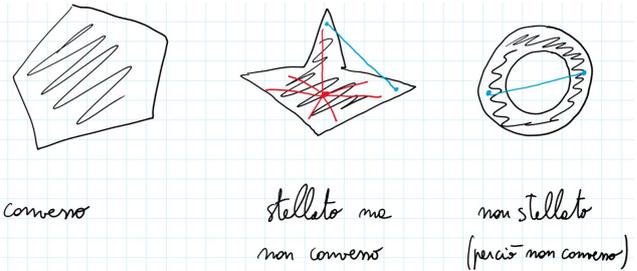
② se $f \sim g$, allora $\exists H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tale che $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Se poniamo $K : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $K(x, s) = H(x, 1 - s)$, allora K è continua (in quanto $(x, s) \mapsto (x, 1 - s)$ lo è), $K_0 = g$ e $K_1 = f$, dunque $g \sim f$.

③ se $f \sim g$ e $g \sim h$, allora $\exists H, K : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ omotopie tali che $H_0 = f, H_1 = g, K_0 = g$ e $K_1 = h$.

Poniamo $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $\tilde{H}(x, s) = \begin{cases} H(x, 2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x, 2s - 1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$. \tilde{H} è ben definita

perché $H_1 = K_0 = g$ (dunque, se $s = \frac{1}{2}$, allora $H(x, 2s) = K(x, 2s - 1)$) ed è continua perché lo sono le sue restrizioni a $X \times [0, \frac{1}{2}]$ e a $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, quindi questi due insiemi, essendo chiusi ed in numero finito, danno un ricoprimento fondamentale di $X \times [0, 1]$. \square

Ricordiamo che un sottoinsieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **stellato** rispetto a $x_0 \in \Omega$, se $\forall x \in \Omega$ il segmento $[x_0, x] = \{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0, 1]\}$ è tutto contenuto in Ω : è **convesso**, se è stellato rispetto a ogni suo punto (cioè $[x, y] \subseteq \Omega \forall x, y \in \Omega$).



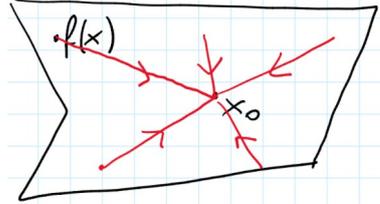
Proposizione 3.1.2. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato e X qualsiasi. Tutte le mappe $X \rightarrow \Omega$ continue sono tutte omotope tra loro.

Dimostrazione. Sia Ω stellato rispetto a x_0 . Poiché essere omotope è una relazione di equivalenza, mostriamo che una qualsiasi $f : X \rightarrow \Omega$ è omotopa alla costante

$$h : X \rightarrow \Omega \quad \forall x \in X. \text{ Basta porre } H(x, s) = (1-s)f(x) + sx_0.$$

$$x \mapsto x_0$$

Fissato $x \in X$, $H(x, s)$ parametrizza il segmento tra $f(x)$ e x_0 . Il fatto chiave è che tale segmento sia davvero contenuto in Ω perché Ω è stellato, dunque effettivamente $H : X \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ è ben definita. È immediato che H sia continua, $H_0 = f$ e $H_1 = h$. □



Esempio 61. $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad e \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \mapsto 0$ sono omotope:

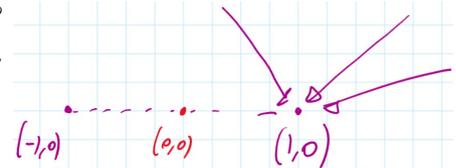
$$H(x, s) = sx \quad (\text{oppure } H(x, s) = (1-s)x)$$

Esempio 62. $\text{Id} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è omotopa ad una costante? $H(x, s) = (1-s)x + s(1, 0)$, $H_0 = \text{Id}$ e $H_1 = \text{costante}$ a valori in $(1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

NON FUNZIONA, in quanto questa H non ha valori in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ad esempio, $H((-1, 0), \frac{1}{2}) = (0, 0)$.

In effetti, si può dimostrare che Id e f non sono omotope.

Notazione: Dati X, Y topologici, $[X, Y] =$ classi di omotopia di mappe da X in Y .



Proposizione 3.1.3. Siano X, Y, Z topologici. Se $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$ verificano $f \sim f'$ e $g \sim g'$, allora $g \circ f \sim g' \circ f'$.

Dimostrazione. Siano $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ e $K : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ le omotopie tra f, f' e g, g' rispettivamente. Poniamo $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow Z$ e otteniamo perciò l'omotopia cercata. □

$$(x, s) \mapsto K(H(x, s), s)$$

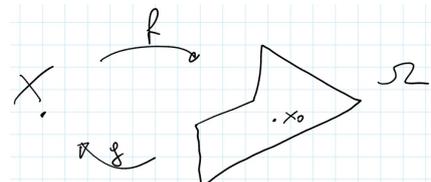
Definizione 3.1.2. Sia $f : X \rightarrow Y$ continua, un'**inversa omotopica** di f è una $g : Y \rightarrow X$ continua tale che $f \circ g \sim \text{Id}_Y$ e $g \circ f \sim \text{Id}_X$.

Se f ammette un'inversa omotopica, allora si dice **equivalenza omotopica**, mentre X e Y si dicono **omotopicamente equivalenti** (o, più brevemente, **omotopi**).

Naturalmente, un **omeomorfismo** è un'equivalenza omotopica e spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Il viceversa però è falso:

Esempio 63. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato (ad esempio $\Omega = \mathbb{R}^n$), allora Ω è omotopicamente equivalente a un punto.

Dimostrazione. Siano $X = \{P\}$, $f : \Omega \rightarrow X$ l'unica mappa possibile ($f(x) = P \forall x \in \Omega$) e $g : X \rightarrow \Omega$ qualsiasi. f e g sono costanti, dunque continue. $f \circ g : X \rightarrow X$ è l'identità, mentre $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega$ è omotopa a $\text{Id} : \Omega \rightarrow \Omega$ perché, essendo Ω stellato, tutte le mappe a valori in Ω sono omotope. □



Definizione 3.1.3. Uno spazio si dice **contraibile**, se è omotopicamente equivalente a un punto.

Abbiamo dunque appena visto che i domini stellati sono contraibili.

Proposizione 3.1.4. “Essere omotopicamente equivalenti” è una relazione di equivalenza tra spazi topologici.

Notazione: $X \cong Y$ = “ X è omeomorfo a Y ” e $X \sim Y$ = “ X è omotopo a Y ”.

Dimostrazione. Riflessività ($X \sim X$): in quanto $\text{Id} : X \rightarrow X$ è un’equivalenza omotopica.

Simmetria ($X \sim Y \implies Y \sim X$): è ovvio, perché, se f ammette inversa omotopica g , allora f stessa è inversa omotopica di g .

Transitività ($X \sim Y$ e $Y \sim Z \implies X \sim Z$): $\exists f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ inverse omotopiche una dell’altra ed $\exists h : Y \rightarrow Z$ e $k : Z \rightarrow Y$ inverse omotopiche una dell’altra.

Diciamo che $h \circ f : X \rightarrow Z$ e $g \circ k : Z \rightarrow X$ sono inverse omotopiche una dell’altra.

Infatti, $(g \circ k) \circ (h \circ f) : X \rightarrow X$ verifica

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = (g \circ (k \circ h)) \circ f \sim (g \circ \text{Id}_Y) \circ f = g \circ f \sim \text{Id}_X$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 X & & & & Y & & h & & Z \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & & & & \\
 & & g & & & & k & &
 \end{array}$$

in cui abbiamo usato la **Proposizione 3.1.3** la quale ci assicura che l’omotopia si comporta bene rispetto alla composizione.

Analogamente si mostra che $(h \circ f) \circ (g \circ k) \sim \text{Id}_Z$, per cui $h \circ f$ e $g \circ k$ sono equivalenze omotopiche e $X \sim Z$. □

In particolare, abbiamo dimostrato anche che la composizione di equivalenze omotopiche è un’equivalenza omotopica.

3.2 Il funtore π_0

(Già visto nel paragrafo **2.16 Componenti connesse e connesse per archi**.)

Definizione 3.2.1. Dato X topologico,

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\} = X/\sim$$

dove $x \sim y \iff \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ arco tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Abbiamo visto che, se $f : X \rightarrow Y$ è continua, allora induce $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$

$$[x] \mapsto [f(x)].$$

La “funtorialità” di questa costruzione è dovuta al fatto che:

1. $\text{Id} : X \rightarrow X$ induce $\text{Id} : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X)$;
2. date $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

π_0 è perciò un **funtore**:

$$\begin{aligned} \pi_0 : (\text{Spazi topologici, funzioni continue}) &\longrightarrow (\text{Insiemi, funzioni}) \\ (X, f) &\longmapsto (\pi_0(X), f_*) \end{aligned}$$

Un isomorfismo di una categoria è una freccia $f : X \rightarrow Y$ tale che esista una freccia $g : Y \rightarrow X$ per cui $f \circ g = \text{Id}_Y$ e $g \circ f = \text{Id}_X$. Deriva proprio dalle proprietà di funtorialità che un funtore trasformi un isomorfismo della categoria di partenza in un isomorfismo di quella di arrivo: se $f \circ g = \text{Id}_Y$ e $g \circ f = \text{Id}_X$, allora

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}^1$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}$$

dunque, se f è un isomorfismo, allora anche f_* è un isomorfismo. Nel caso del π_0 , la funtorialità di π_0 implica perciò che spazi omeomorfi abbiano π_0 isomorfi nella categoria (insiemi, funzioni), cioè abbiano π_0 con la stessa cardinalità, ovvero abbiano lo stesso numero di componenti connesse per archi.

Teorema 3.2.1. Se $f, g : X \rightarrow Y$ sono tali che $f \sim g$, allora $f_*, g_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ sono uguali.

Dimostrazione. Sia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ un’omotopia tra f e g . $\forall x \in X$ la mappa

$$\begin{aligned} \gamma_x : [0, 1] &\longrightarrow Y \\ s &\longmapsto H(x, s) \end{aligned}$$

è un cammino in Y che congiunge $f(x) = H(x, 0)$ con $g(x) = H(x, 1)$, dunque $[f(x)] = [g(x)]$ e perciò $f_*([x]) = g_*([x])$. \square

Corollario 3.2.2. Se $X \sim Y$, allora $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$, cioè il numero di componenti connesse per archi è un invariante di omotopia.

Dimostrazione. Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ inverse omotopiche l’una dell’altra, quindi

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = {}^2 (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{\pi_0(Y)}$$

Analogamente, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\pi_0(X)}$, dunque f_* è una bigezione (con inversa g_*) tra $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$. \square

¹Freccia nella categoria di arrivo.

²Perché $f \circ g \sim \text{Id}_Y$ e per il **Teorema 3.2.1**.

3.3 Retratti e retratti di deformazione

Definizione 3.3.1. Dati X topologico e $Y \subseteq X$, se $\exists r : X \rightarrow Y$ continua tale che $r(y) = y \forall y \in Y$, cioè, se $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione e $r \circ i = \text{Id}_Y$, allora Y è un **retrato** di X .

Tale r si chiama **retrazione**.

Y è un **retrato di deformazione**, se $\exists H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ continua tale che:

- $H(x, 0) = x \forall x \in X$ (cioè $H_0 = \text{Id}$);
- $H(x, 1) \in Y \forall x \in X$ (cioè $H_1(X) \subseteq Y$);
- $H(y, s) = y \forall y \in Y$ e $\forall s \in I$ (cioè H fissa Y punto per punto a ogni istante).

Se Y è un retratto di deformazione è anche un retratto: basta porre $r(x) = H(x, 1) \forall x \in X$ per ottenere $r : X \rightarrow Y$ continua tale che $r(y) = y \forall y \in Y$.

Osservazione 77. Dati X e $x_0 \in X$ qualsiasi, x_0 è un retratto di X , in quanto $r : X \rightarrow \{x_0\}$
 $x \mapsto x_0$

$\forall x \in X$ è continua e verifica $r(x_0) = x_0$.

In generale, però non è un retratto di deformazione.

Osservazione 78. Se Y è un retratto di deformazione di X , allora $Y \sim X$.

Infatti, dette $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione e $r : X \rightarrow Y$ la retrazione indotta dall'omotopia

H che compare nella definizione di retratto di deformazione, si ha $r \circ i = \text{Id}_Y$ e $i \circ r = H_1$ ³, ma $H_1 \sim H_0 = \text{Id}_X$, per cui $i \circ r \sim \text{Id}_X$ e dunque r e i sono equivalenze omotopiche.

Osservazione 79. Dall'**Osservazione 78** discende che, se $\{x_0\} \subseteq X$ è un retratto di deformazione, allora X è contraibile.

Osservazione 80. Per quanto visto su π_0 , se X è contraibile, allora $\pi_0(X) \cong \pi_0(\{P\})$, cioè X deve essere connesso per archi.

Domanda: esistono spazi connessi per archi non contraibili?

Risposta: sì, ma come si dimostra che uno spazio non è contraibile?

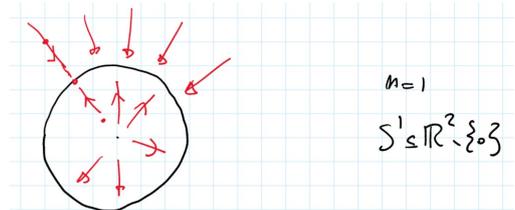
3.3.1 Importante esempio di retratto

Esempio 64. S^n è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Idea: basta porre

$$H : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$(v, s) \mapsto (1-s)v + s \frac{v}{\|v\|}$$



È fondamentale notare che questa mappa sia ben definita, in quanto $\|v\| \neq 0 \forall v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $H(v, s) \neq 0$ (cioè appartiene a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$) $\forall (v, s) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0, 1]$ ⁴.

Domanda: S^n è un retratto di \mathbb{R}^{n+1} ? La retrazione appena scritta non si estende in 0, ma ne esistono altre?

Risposta: no, lo vedremo nel caso $n = 1$ ($S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$) usando il gruppo fondamentale.

³In quanto $i(r(x)) = i(H(x, 1)) = H(x, 1)$, dato che $H(x, 1) \in Y$.

⁴Cosa ovvia perché $s \mapsto (1-s)v + s \frac{v}{\|v\|}$ parametrizza il segmento che congiunge v a $\frac{v}{\|v\|}$, segmento che non passa per l'origine.

3.4 Gruppo fondamentale (o Primo gruppo di omotopia)

Notazione: Siano X topologico e $x_0, x_1 \in X$. Poniamo

$\Omega(X, x_0, x_1)$ ⁵ = "spazio dei cammini da x_0 a x_1 " = $\{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$

Su questo spazio mettiamo la relazione di equivalenza **omotopia di cammini**, secondo cui γ è omotopo a γ' come cammino, se $\exists H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che

- $H_0 = H(\cdot, 0) = \gamma$ e $H_1 = H(\cdot, 1) = \gamma'$;
- $H(0, s) = x_0$ ($= \gamma(0) = \gamma'(0)$) $\forall s \in [0, 1]$;
- $H(1, s) = x_1$ $\forall s \in [0, 1]$.

Una tale omotopia, per ovvie ragioni, si chiama **a estremi fissi**.

La richiesta che l'omotopia sia a estremi fissi è fondamentale, in quanto, se la rimuoviamo, ogni γ risulta omotopo a ogni γ' per $\gamma, \gamma' \in \Omega(x_0, x_1)$, ad esempio perché ogni $\gamma \in \Omega(x_0, x_1)$ è omotopo (come mappa, senza guardare gli estremi) alla costante x_0 tramite $H(t, s) = \gamma(st + (1-s))$.

(Stiamo contraendo il dominio $[0, 1]$ su $\{0\}$ e componendo con γ .)

Proposizione 3.4.1. *L'omotopia di cammini a estremi fissi è una relazione di equivalenza su $\Omega(x_0, x_1)$.*

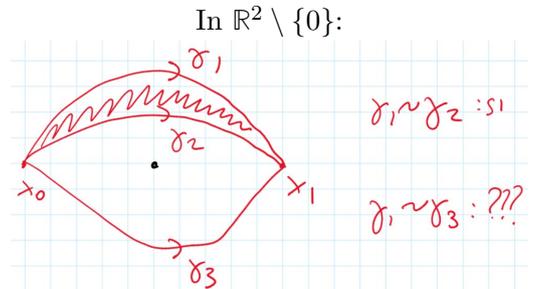
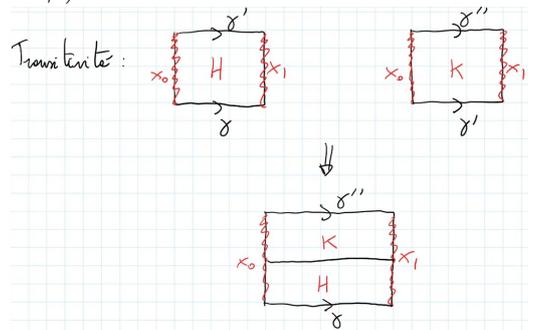
Dimostrazione. Riflessività e simmetria sono identiche al caso dell'omotopia tra mappe: $H(t, s) = \gamma(t)$ è a estremi fissi e, se H è a estremi fissi, allora pure $K(t, s) = H(t, 1-s)$ lo è. Anche la transitività è identica al caso generale, perché, giustapponendo due omotopie a estremi fissi, si ha un'omotopia a estremi fissi. \square

Con un abuso di notazione, indicheremo ancora con \sim l'omotopia di cammini.

Esiste una ben definita "giunzione di cammini":

$$\begin{aligned} \Omega(x_0, x_1) \times \Omega(x_1, x_2) &\longrightarrow \Omega(x_0, x_2) \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\longmapsto \gamma_1 * \gamma_2 \end{aligned}$$

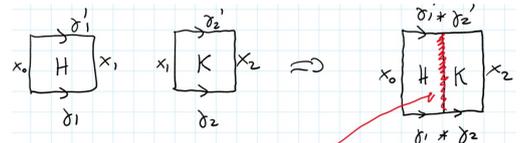
$$\text{dove } \gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



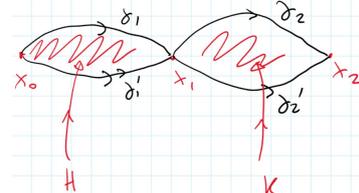
Teorema 3.4.2. *Se $\gamma_1 \sim \gamma'_1$ in $\Omega(x_0, x_1)$ e $\gamma_2 \sim \gamma'_2$ in $\Omega(x_1, x_2)$, allora $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma'_1 * \gamma'_2$ in $\Omega(x_0, x_2)$. (Slogan: "l'omotopia di cammini si comporta bene per la concatenazione".)*

Dimostrazione. Se H, K sono omotopie tra γ_1, γ'_1 e γ_2, γ'_2 rispettivamente, allora poniamo

$$H * K : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X \\ (t, s) \longmapsto \begin{cases} H(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



si incolla bene proprio perché $H(1, s) = x_1$ e $K(0, s) = x_1 \forall s \in [0, 1]$.



È ben definita (e perciò continua) proprio perché H e K sono a estremi fissi! \square

⁵Oppure $\Omega(x_0, x_1)$, se X è chiaro o poco importante.

Definizione 3.4.1. Dato $x_0 \in X$, il **gruppo fondamentale** di X con punto base x_0 è

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0) / \sim$$

cioè l'insieme delle classi di omotopia dei cammini con punto iniziale e finale x_0 , detti "**lacci**" in x_0 .

Dimostriamo ora che $\pi_1(X, x_0)$ sia un gruppo con la seguente operazione

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\longmapsto [\alpha * \beta] \end{aligned}$$

(ben definita per il **Teorema 3.4.2**).

Lemma 3.4.3. Se $\alpha \in \Omega(x_0, x_1)$ e $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è continua tale che $j(0) = 0$ e $j(1) = 1$, allora $[\alpha] = [\alpha \circ j]$ in $\Omega(x_0, x_1) / \sim$, cioè riparametrizzazioni di un cammino sono omotope al cammino.

Dimostrazione. Basta porre $H(t, s) = \alpha(st + (1-s)j(t))$. □

Associatività: dobbiamo vedere che $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega(x_0, x_0)$,

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

È immediato verificare che $(\alpha * \beta) * \gamma$ è una riparametrizzazione di $\alpha * (\beta * \gamma)$, per cui i due cammini sono omotopi (**Lemma 3.4.3**).

Elemento neutro: scegliamo $1 = [c_{x_0}]$, dove c_{x_0} è il cammino costante in x_0 .

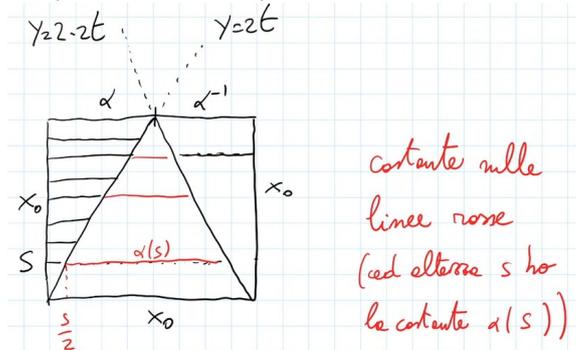
Infatti, $c_{x_0} * \alpha$ e $\alpha * c_{x_0}$ sono riparametrizzazioni di α , per cui sono omotopi ad α . Ad esempio,

$$c_{x_0} * \alpha = \alpha \circ j, \text{ con } j(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t - 1 & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Inverso: dato $\alpha \in \Omega(x_0, x_1)$, porremo $\alpha^{-1} \in \Omega(x_1, x_0)$ tale che $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$, cioè α percorso nel senso inverso. Se $\alpha \in \Omega(x_0, x_0)$, allora $\alpha^{-1} \in \Omega(x_0, x_0)$ e proviamo a porre $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$. Basta vedere che $\alpha \sim \beta \implies \alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$, cosicché $[\alpha]^{-1}$ sia ben definita ⁶. Inoltre, bisogna verificare che davvero $[\alpha] \cdot [\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}] \cdot [\alpha] = [c_{x_0}]$, cioè che $\alpha * \alpha^{-1} \sim c_{x_0}$ e $\alpha^{-1} * \alpha \sim c_{x_0}$. Basta vederne una, ad esempio che $\alpha * \alpha^{-1} \sim c_{x_0}$.

Idea: al tempo (dell'omotopia) s , percorriamo α tra 0 e s e torniamo indietro, così, per $s = 0$, abbiamo c_{x_0} e, per $s = 1$, abbiamo $\alpha * \alpha^{-1}$.

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } s \geq 2t \\ \alpha(s) & \text{se } s \leq 2t \wedge s \leq 2 - 2t \\ \alpha(2 - 2t) & \text{se } s \geq 2 - 2t \end{cases}$$



H è ben definita: se $s = 2t$, le prime due formule coincidono mentre, se $s = 2 - 2t$, le ultime due formule coincidono ⁷.

Per $H(0, s)$, dobbiamo sempre applicare la prima formula che dà $\alpha(2t) = \alpha(0) = x_0$.

Per $H(1, s)$, possiamo applicare la terza che dà $\alpha(2 - 2t) = \alpha(0) = x_0$.

Dunque H è un'omotopia a estremi fissi.

Per $H(t, 0)$, applichiamo la seconda formula ottenendo $H(t, 0) = \alpha(0) = x_0 \forall t$, cioè $H_0 = c_{x_0}$.

Per $H(t, 1)$, dipende: se $t \leq \frac{1}{2}$, applichiamo la prima formula e abbiamo $\alpha(2t)$, se invece $t \geq \frac{1}{2}$, applichiamo la terza e abbiamo $\alpha(2 - 2t)$.

Dunque, $H_1 = \alpha * \alpha^{-1}$, in quanto

$$\alpha * \alpha^{-1} = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha^{-1}(2t - 1) = \alpha(1 - (2t - 1)) = \alpha(2 - 2t) & \text{se } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Abbiamo così mostrato che $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo.

⁶Verificarlo per **Esercizio**.

⁷Che le formule siano ben definite, cioè ad esempio che calcoliamo $\alpha(2s)$ solo quando $2s \leq 1$ discende dalla costruzione.

3.5 Bouquet (o Wedge) di spazi topologici

⁸ Siano X, Y due spazi topologici. L'unione disgiunta di X e Y ⁹ è lo spazio topologico $Z = X \sqcup Y$ dotato della topologia per cui $U \subseteq Z$ è aperto $\iff U \cap X$ è aperto in X e $U \cap Y$ è aperto in Y ¹⁰. X, Y sono entrambi aperti e chiusi di Z , dunque, se sono non vuoti, allora Z è sconnesso. Inoltre, le inclusioni $X \hookrightarrow Z$ e $Y \hookrightarrow Z$ sono immersioni topologiche (tutto ovvio).

Z è compatto $\iff X$ e Y lo sono.

Infatti, X e Y sono chiusi in Z , per cui, poiché i chiusi in un compatto sono compatti, se Z è compatto, allora anche X e Y lo sono ¹¹.

Viceversa, se X e Y sono compatti, allora Z è unione di due compatti e dunque è compatto.

Veniamo al bouquet: siano $x_0 \in X, y_0 \in Y$ due punti base.

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$$

Quando è chiaro (o irrilevante) chi siano x_0 e y_0 , si scrive

$$X \vee Y = (X, x_0) \vee (Y, y_0)$$

Sia $i = \pi \circ k$, con $k : X \hookrightarrow X \sqcup Y$ e $\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \vee Y$.

(1) Si mostri che le mappe $i : X \rightarrow X \vee Y, j : Y \rightarrow X \vee Y$ indotte dalle inclusioni di X, Y in $X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche.

È chiaro che i sia iniettiva. Dimostriamo che è un'immersione topologica (cioè un omeomorfismo con l'immagine) cosicché ritroviamo una copia di X dentro $X \vee Y$. i è continua in quanto composizione di k (che è continua per quanto visto sopra) e π che è sempre continua.

Per concludere, basta vedere che i sia aperta sull'immagine, cioè $\forall A \subseteq X$ aperto $i(A)$ deve essere aperto in $i(X)$. Infatti, $i(A) = U \cap i(X)$, dove $U = \pi(A \cup Y)$, è aperto in $X \vee Y$, in quanto $A \cup Y$ è un aperto saturo di $X \sqcup Y$.

(2) $X \vee Y$ è connesso \iff sia X che Y lo sono.

È facile da verificare.

(3) $X \vee Y$ è compatto \iff sia X che Y lo sono.

(\Leftarrow) X, Y compatti $\implies X \sqcup Y$ compatto $\implies X \vee Y$ compatto, perché quoziente di un compatto.

(\implies) Saremmo tentati di dire che, se $X \vee Y$ è compatto, allora anche X lo è in quanto chiuso in $X \vee Y$ ($X \cong i(X)$). Molto spesso X è chiuso in $X \vee Y$, ma non sempre (vedasi il punto successivo).

Poiché $X \cong i(X)$, basta vedere che $i(X)$ sia compatto. Sia $\Omega = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $i(X)$ e $\forall i \in I$ poniamo

$$U'_i = \begin{cases} U_i & \text{se } [x_0] \notin U_i \\ U_i \cup i(Y) & \text{se } [x_0] \in U_i \end{cases}$$

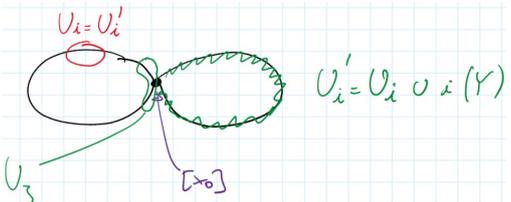
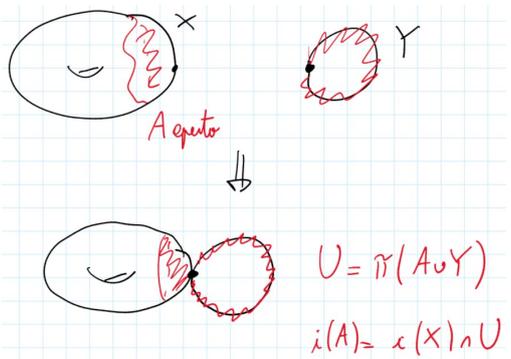
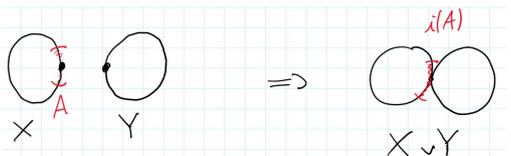
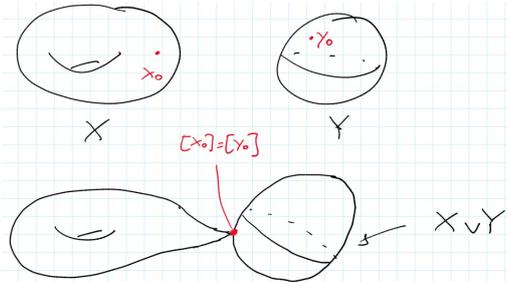
Ora, U'_i è sempre aperto in $X \vee Y$:

se $[x_0] \notin U_i, \pi^{-1}(U'_i) = \pi^{-1}(U_i) = U_i$ che è aperto in $X \sqcup Y$;

se $[x_0] \in U_i, \pi^{-1}(U'_i) = U_i \cup Y$, che è aperto in $X \sqcup Y$.

Inoltre, $\{U'_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di $X \vee Y$: poiché $U_i \subseteq U'_i$, di sicuro ricopre $i(X)$ e, poiché $\exists i_0$ tale che $[x_0] \in U_{i_0}$, abbiamo $i(Y) \subseteq U'_{i_0}$. Per compattezza di $X \vee Y, \exists J$ finito tale che

$$X \vee Y = \bigcup_{i \in J} U'_i \implies i(X) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$$



⁸Vedasi **Esercizi II settimana, Esercizio 58**.

⁹Vedasi **Esercizi II settimana, Esercizio 57**.

¹⁰È facilissimo verificare che sia una topologia.

¹¹Stiamo usando che $i : X \rightarrow i(X) \subseteq Z$ sia un omeomorfismo.

(4') $i(X)$ e $i(Y)$ sono chiusi in $X \vee Y \iff \{x_0\}$ è chiuso in X e $\{y_0\}$ è chiuso in Y .
 Infatti, $i(X)$ è chiuso $\iff \pi^{-1}(i(X))$ è chiuso in $X \sqcup Y \iff X \cup \{y_0\}$ è chiuso in $X \sqcup Y \iff$ ¹² $\{y_0\}$ è chiuso in Y .
 Analogamente, $i(Y)$ è chiuso in $X \vee Y \iff \{x_0\}$ è chiuso in X .

In particolare vale: (4) Si mostri che se X e Y sono T_1 , allora $i(X)$ e $j(Y)$ sono chiusi in $X \vee Y$ e le mappe i, j sono chiuse.

(5) Si mostri che se X e Y sono T_2 , allora $X \vee Y$ è T_2 .

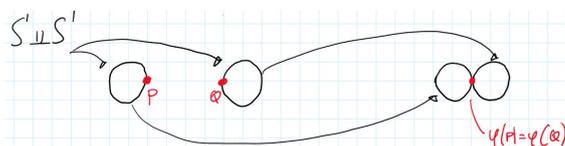
Esempio 65. $S^1 \vee S^1 \cong Z = \{((x-1)^2 + y^2 - 1)((x+1)^2 + y^2 - 1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{rcccl} \varphi : & S^1 & \sqcup & S^1 & \longrightarrow & Z \\ & (\cos \theta, \sin \theta) & & & \longmapsto & (\cos \theta - 1, \sin \theta) \\ & & & (\cos \theta, \sin \theta) & \longmapsto & (\cos \theta + 1, \sin \theta) \end{array}$$

φ è continua perché è continua su ciascuna copia di S^1 e le due copie di S^1 in $S^1 \sqcup S^1$ danno un ricoprimento aperto, dunque fondamentale.

È anche chiaramente surgettiva e $\varphi(P) = \varphi(Q) \iff P = Q$ oppure P, Q sono come in figura.



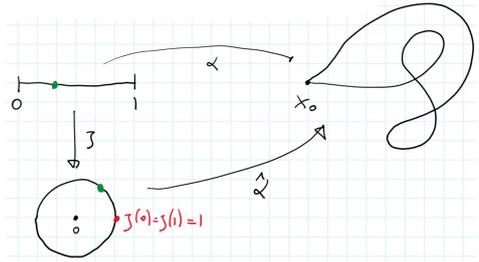
Dunque, φ induce $\bar{\varphi} : S^1 \vee S^1 \longrightarrow Z$ continua e bigettiva. Poiché $S^1 \vee S^1$ è compatto e $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ è T_2 , $\bar{\varphi}$ è un omeomorfismo (**Teorema 2.20.6**). □

¹²Poiché X è sempre chiuso in X .

3.6 Cammini in $\Omega(x_0, x_0)$ e mappe $S^1 \rightarrow X$

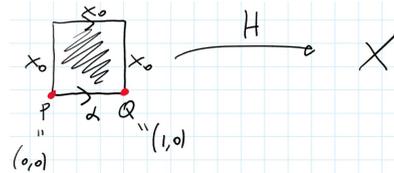
¹³ Siano X uno spazio topologico, $x_0 \in X$ e $j : [0, 1] \rightarrow S^1$ tale che $j(t) = e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ (vediamo S^1 come sottoinsieme di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$).

Mostriamo che $\forall \alpha \in \Omega(x_0, x_0) \exists! \hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$ continua tale che $\alpha = \hat{\alpha} \circ j$ (e dunque $\hat{\alpha}(1) = x_0$). Poiché j è un'identificazione, per il **Teorema 2.24.3**, cioè induce $[0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$, $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$, oltre ad essere ben definita, è continua.



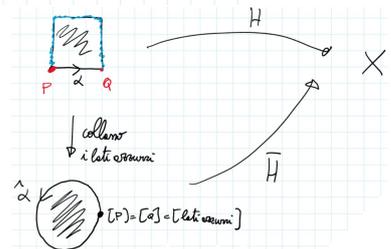
Fatto 3.6.1. $[\alpha] = 1$ in $\pi_1(X, x_0) \iff \hat{\alpha}$ si estende in maniera continua su tutto D^2 .

Dimostrazione. (\implies) $[\alpha] = 1 \implies \exists H$ omotopia fatta così:



Collassando i tre lati di $[0, 1] \times [0, 1]$ che vengono mandati nella costante x_0 , otteniamo ancora un quadrato ($\cong D^2$) il cui bordo sarà uguale all'immagine del quarto lato.

\bar{H} è continua (e ben definita proprio perché i tre lati azzurri vanno in x_0) per le proprietà della topologia quoziente e fornisce l'estensione continua cercata di $\hat{\alpha}$ su D^2 .

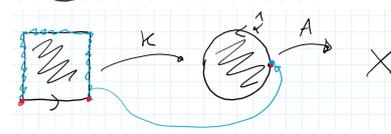


(\impliedby) Ora sappiamo che $\exists A : D^2 \rightarrow X$ tale che $A|_{S^1} = \hat{\alpha}$.

Sia $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D^2$ tale che $K(t, 0) = e^{2\pi it}$ e

$$K(t, 1) = H(0, s) = H(1, s) = 1 \in S^1 \subseteq D^2$$

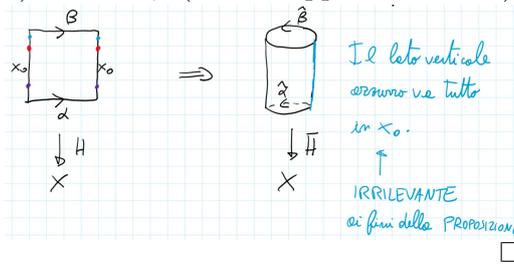
Poniamo $H = A \circ K$ e dunque otteniamo $[\alpha] = 1$. □



Proposizione 3.6.2. La mappa $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ induce una ben definita $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\alpha \sim \beta$ (a estremi fissi) $\implies \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ (come mappe da S^1 in X).

Se $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ è un'omotopia a estremi fissi tra α e β , poiché $H(0, s) = H(1, s) = x_0 \forall s \in [0, 1]$, allora H induce una ben definita $\bar{H} : [0, 1]/\{0, 1\} \times [0, 1] \rightarrow X$, da cui $\bar{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$, che è l'omotopia richiesta tra $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ (al solito, identifichiamo S^1 con $[0, 1]/\{0, 1\}$ tramite $[t] = e^{2\pi it}$).



Teorema 3.6.3. ① Se X è connesso per archi, allora $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ è surgettiva.

② $\psi(g) = \psi(h) \iff g$ e h sono coniugati.

Dimostrazione. ① Basta vedere che ogni $\gamma : S^1 \rightarrow X$ sia omotopa a una $\beta : S^1 \rightarrow X$ tale che $\beta(1) = x_0$. Infatti, una tale $\beta = \hat{\alpha}$, con $\alpha(t) = \beta(e^{2\pi it})$.

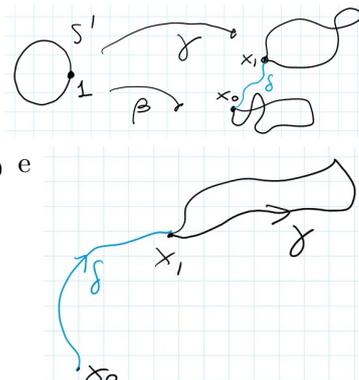
Si tratta perciò solo di una questione di punti base.

Poiché X è connesso per archi, $\exists \delta : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\delta(0) = x_0$ e $\delta(1) = \gamma(1) = x_1$.

Inoltre, $\gamma = \tilde{\gamma}$ per qualche $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\tilde{\gamma} \in \Omega(x_1, x_1)$.

Poniamo $\tilde{\beta} = \delta * \tilde{\gamma} * \delta^{-1}$, quindi, per costruzione, $\tilde{\beta} \in \Omega(x_0, x_0)$.

Infine, sia $\beta = \hat{\tilde{\beta}}$. Vogliamo vedere che $\gamma \sim \beta$ in $[S^1, X]$.



¹³Vedasi **Esercizi III settimana, Esercizio 62**.

In effetti, poiché in $[S^1, X]$ siamo liberi da punti base, poniamo

$$\delta_s(t) = \begin{cases} \delta(s) & \forall t \in [0, s] \\ \delta(t) & \forall t \in [s, 1] \end{cases}$$

Posto $H_s(t) = (\delta_s * \tilde{\gamma} * \delta_s^{-1})(t)$, $H(t, s) = H_s(t)$ è l'omotopia cercata una volta che la facciamo passare al quoziente su S^1 : poiché $H(0, s) = H(1, s) = \delta_s \forall s$, H passa al quoziente su

$$[0,1]/\{0,1\} \times [0,1] = S^1 \times [0,1]$$

dando l'omotopia richiesta tra β e (una riparametrizzazione di) γ , dunque $\gamma \sim \beta$. Questo mostra che, se X è connesso per archi, allora $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ è surgettiva.

② (\Leftarrow) Visto che g e h sono coniugati, $g = [\alpha]$ e $h = [\delta * \alpha * \delta^{-1}]$, per qualche $\alpha, \delta \in \Omega(x_0, x_0)$.

Vogliamo mostrare che $\hat{\alpha} \sim (\delta * \hat{\alpha} * \delta^{-1})^a$. È esattamente quello che abbiamo visto sopra ^b: definendo δ_s come prima, abbiamo di nuovo che

$$H : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X \quad (t,s) \mapsto \delta_s * \alpha * \delta_s^{-1}(t) \quad \text{induce } \bar{H} : S^1 \times [0,1] \rightarrow X$$

omotopia tra $\hat{\alpha}$ e $(\delta * \hat{\alpha} * \delta^{-1})$. (Retrarre un loop, in questo caso δ , sul suo punto iniziale/finale può sembrare strano, ma ricordiamoci che stiamo lavorando con omotopie libere.)

(\Rightarrow) Siano $g = [\alpha]$, $h = [\beta]$ e supponiamo perciò $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ in $[S^1, X]$. Sia $H : S^1 \times [0,1] \rightarrow X$ l'omotopia tra $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ tale che $H_0 = \hat{\alpha}$ e $H_1 = \hat{\beta}$.

$$\text{Poniamo } \tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X \quad (t,s) \mapsto H(e^{2\pi i t}, s)$$

Posto anche $\delta(t) = H(1 = e^{2\pi i \cdot 0} = e^{2\pi i \cdot 1}, t)$, per costruzione,

$$H(0, t) = H(1, t) = \delta(t)$$

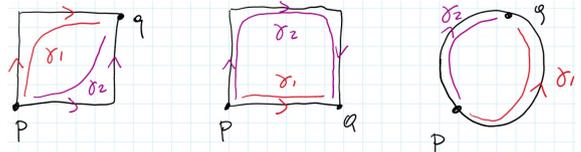
^aOmotopia (non puntata) per mappe da S^1 in X .

^bIn questo caso, anche δ è un loop, cioè parte e arriva in x_0 , mentre prima abbiamo trattato il caso generale.

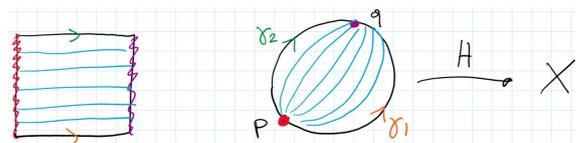
H ci dice che α è omotopo a estremi fissi a $\delta * \beta * \delta^{-1}$, perciò si ha $[\alpha] = [\delta * \beta * \delta^{-1}] = [\delta] * [\beta] * [\delta]^{-1}$, cioè $[\alpha]$ è coniugato a $[\beta]$. \square

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il seguente utilissimo

Fatto 3.6.4. Siano $C = D^2$ o $C = [0,1] \times [0,1]$ e $H : C \rightarrow X$ continua. Se poi γ_1 e γ_2 sono due archi complementari sul bordo di C che iniziano in P e finiscono in Q , allora γ_1 è omotopo a estremi fissi a γ_2 (ossia $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(H(P), H(Q))$).



Idea: il fatto che $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ si estenda a tutto D^2 "dà" l'omotopia: infatti, presa $A : [0,1] \times [0,1] \rightarrow D^2$ continua tale che $A(\{0\} \times [0,1]) = P$ e $A(\{1\} \times [0,1]) = Q$, $\tilde{H} = H \circ A : [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ è un'omotopia a estremi fissi tra γ_1 e γ_2 (chiediamo anche che $A|_{[0,1] \times \{0\}} = \gamma_1$ e $A|_{[0,1] \times \{1\}} = \gamma_2$).



3.7 Il funtore π_1

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua tale che $f(x_0) = y_0$.

Siano $\alpha, \beta \in \Omega(x_0, x_0)$ e supponiamo $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi_1(X, x_0)$, cioè $\alpha \sim \beta$ come cammini.

Diciamo che $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$ come cammini in $\Omega(y_0, y_0)$, cioè $[f \circ \alpha] = [f \circ \beta]$ in $\pi_1(Y, y_0)$: infatti, se H è un'omotopia a estremi fissi tra α e β , allora $f \circ H$ è un'omotopia a estremi fissi tra $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$.

Abbiamo perciò dimostrato che è ben definita la mappa

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Data $g : Y \rightarrow Z$ continua tale che $g(y_0) = z_0$, abbiamo

$$g_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

e si ha

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

in quanto $(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha]))$.

È anche ovvio che $\text{Id} : X \rightarrow X$ induca $\text{Id}_* = \text{Id} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Abbiamo perciò un funtore, ma tra quali categorie?

La categoria di partenza è *Spazi topologici con funzioni continue*; a essere precisi, in realtà, servirebbe la categoria degli spazi topologici puntati con mappe continue che preservano la puntatura, in quanto ad X vogliamo associare $\pi_1(X, x_0)$ (e dunque ci serve la coppia (X, x_0)) e, affinché $f : X \rightarrow Y$ induca $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, è necessario che $f(x_0) = y_0$. La categoria in arrivo invece è quella dei gruppi.

Poiché le frecce dei gruppi sono gli omomorfismi di gruppo, per avere un funtore serve la seguente

Proposizione 3.7.1. *Se $f : X \rightarrow Y$ è continua, allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ è un omomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Dati $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$f_*([\alpha] \cdot [\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] \stackrel{\substack{\text{pensateci,} \\ \text{è ovvio!}}}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta])$$

□

Corollario 3.7.2. *Se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ è un isomorfismo di gruppi.*

Definizione 3.7.1. *Date $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ mappe **puntate**, cioè tali che $f(x_0) = g(x_0) = y_0$, un'omotopia **puntata** tra f e g è un' $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $H(x_0, s) = y_0 \forall s \in [0, 1]$.*

Teorema 3.7.3. *Date $f, g : X \rightarrow Y$, con $f(x_0) = g(x_0) = y_0$, se f, g sono omotope tramite un'omotopia puntata, allora $f_* = g_*$ come mappe $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.*

Dimostrazione. Sia H l'omotopia puntata tra f e g , allora $\forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

$$\begin{aligned} \tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (t, s) &\longmapsto H(\alpha(t), s) \end{aligned}$$

è un'omotopia a estremi fissi¹⁴ tra $f \circ \alpha$ e $g \circ \alpha$. □

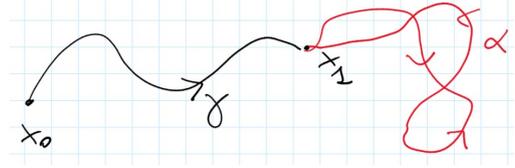
Vorremmo però “liberarci” dal punto base e dalla necessità di considerare omotopie puntate.

¹⁴Perché H è puntata!

3.7.1 Dipendenza del π_1 dal punto base

Siano X topologico fissato e $\gamma \in \Omega(x_0, x_1)$, con $x_0, x_1 \in X$.
 γ induce una mappa

$$\begin{aligned} \Omega(x_1, x_1) &\longrightarrow \Omega(x_0, x_0) \\ \alpha &\longmapsto \gamma * \alpha * \gamma^{-1} \end{aligned}$$



Proposizione 3.7.4. Se $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi_1(X, x_1)$, allora $[\gamma * \alpha * \gamma^{-1}] = [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$ in $\pi_1(X, x_0)$, dunque la mappa appena descritta fornisce un ben definito omomorfismo di gruppi

$$\gamma_{\#} : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che $\alpha \sim \beta \implies \gamma * \alpha \sim \gamma * \beta \implies (\gamma * \alpha) * \gamma^{-1} \sim (\gamma * \beta) * \gamma^{-1}$ (dove \sim indica l'omotopia a estremi fissi), il che mostra la prima affermazione.

Per la seconda, $\forall \alpha, \beta \in \Omega(x_1, x_1)$

$$\gamma * (\alpha * \beta) * \gamma^{-1} \sim (\gamma * \alpha) * (\gamma^{-1} * \gamma) * (\beta * \gamma^{-1}) \sim (\gamma * \alpha * \gamma^{-1}) * (\gamma * \beta * \gamma^{-1})$$

$$\text{cioè } \gamma_{\#}([\alpha] \cdot [\beta]) = \gamma_{\#}([\alpha]) \cdot \gamma_{\#}([\beta]). \quad \square$$

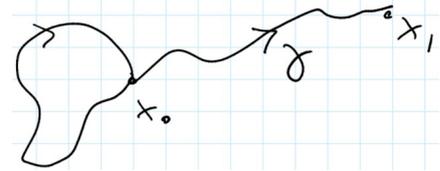
Proposizione 3.7.5. Con le notazioni qui sopra, $(\gamma^{-1})_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ è l'inversa di $\gamma_{\#}$.

Dimostrazione. $\forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

$$\gamma_{\#}(\gamma_{\#}^{-1}([\alpha])) = \gamma_{\#}([\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]) = [\gamma * \gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1}] = [\alpha]$$

in quanto $[\gamma * \gamma^{-1}] = 1$ in $\pi_1(X, x_0)$.

Stessa cosa per $\gamma_{\#}^{-1} \circ \gamma_{\#}$. □



Corollario 3.7.6. Se X è connesso per archi, allora $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ (isomorfi come gruppi) $\forall x_0, x_1 \in X$ tramite un isomorfismo NON canonico (dipende dalla scelta del cammino tra x_0 e x_1).

Dunque, se X è connesso per archi, allora la classe di isomorfismo di $\pi_1(X, x_0)$ non dipende da x_0 e viene perciò denotata a volte con $\pi_1(X)$.

3.8 Invarianza del π_1 per equivalenze omotopiche non puntate

Abbiamo visto che, se X è connesso per archi, allora $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \forall x_0, x_1 \in X$ e abbiamo anche dimostrato che mappe omotepe tramite omotopie puntate inducono lo stesso omomorfismo sul π_1 . Ci interessiamo ora a omotopie generiche.

Proposizione 3.8.1. *Se X è topologico, $x_0 \in X$ e $f : X \rightarrow X$ è omotopa all'identità, allora*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0))$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto H(x_0, t)$, dove $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ è un'omotopia tale che $H_0 = \text{Id}_X$ e $H_1 = f$. Per costruzione, $\gamma(0) = H_0(x_0) = \text{Id}(x_0) = x_0$ e $\gamma(1) = H_1(x_0) = f(x_0)$.

Per concludere, basta dimostrare che $f_* = \gamma_{\#}^{-1}$ in quanto abbiamo visto che $\gamma_{\#}$ e $\gamma_{\#}^{-1}$ sono isomorfismi.

Dato $\alpha \in \Omega(x_0, x_0)$, dall'omotopia H deduciamo un'omotopia

$$K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (t, s) \mapsto H(\alpha(t), s), \text{ in quanto}$$

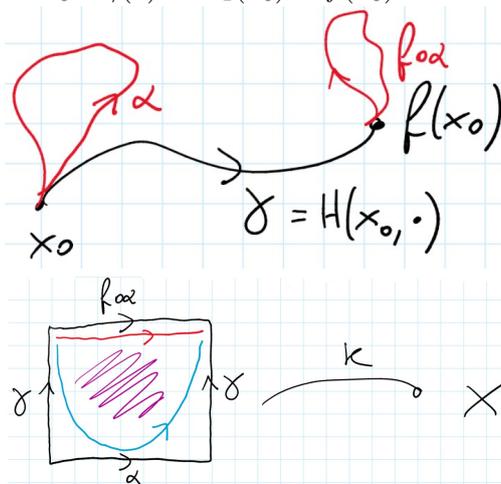
$$K(t, 0) = H(\alpha(t), 0) = \alpha(t)$$

$$K(t, 1) = H(\alpha(t), 1) = f(\alpha(t))$$

$$K(0, s) = H(\alpha(0), s) = H(x_0, s) = \gamma(s)$$

$$K(1, s) = H(\alpha(1), s) = H(x_0, s) = \gamma(s)$$

Per quanto già visto, segue che $f \circ \alpha \sim \gamma^{-1} * \alpha * \gamma$, cioè $f_*([\alpha]) = \gamma_{\#}^{-1}([\alpha])$.



□

Teorema 3.8.2. *Se $f : X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica (senza richieste sui punti base), allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ è un isomorfismo.*

(Slogan: "spazi omotopicamente equivalenti hanno π_1 isomorfo".)

Dimostrazione. Sia $g : Y \rightarrow X$ l'inversa omotopica di f , quindi $f \circ g \sim \text{Id}_Y$ e $g \circ f \sim \text{Id}_X$. Consideriamo le mappe $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ e $g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$.

Per la **Proposizione 3.8.1**,

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$$

è un isomorfismo, da cui segue l'iniettività di f_* e la surgettività di g_* .

Scambiando i ruoli di f e g , otteniamo che g_* è iniettiva e f_* è surgettiva.

□

Definizione 3.8.1. X si dice **semplicemente connesso**, se è connesso per archi e $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ (ovviamente, per quanto detto, è equivalente chiederlo per qualche x_0 o per ogni x_0).

Corollario 3.8.3. *Contraibile \implies semplicemente connesso.*

Dimostrazione. X contraibile $\implies X \sim \{P\} \implies \pi_1(X) \cong \pi_1(\{P\})$, ma il π_1 di un punto è banale.

□

Corollario 3.8.4. *Tutti i domini stellati di \mathbb{R}^n (come \mathbb{R}^n stesso) sono semplicemente connessi.*

Domanda: esistono esempi con $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$?

Risposta: sì, ma per dimostrarlo (e per molto altro) è utile introdurre la **Teoria dei Rivestimenti**.

3.9 Rivestimenti

Definizione 3.9.1. $f : X \rightarrow Y$ continua è un **omeomorfismo locale**, se $\forall x \in X \exists U, V$ intorno aperti rispettivamente di x in X e di $f(x)$ in Y tali che $f|_U : U \rightarrow V$ sia un omeomorfismo.

Esempio 66. L'inclusione di un aperto di X in X stesso è un omeomorfismo locale.

Esempio 67. $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ è un omeomorfismo locale (non iniettivo).



Esempio 68. Se $X = \mathbb{R} \times \{\pm 1\} / \sim$, cioè la retta con punto doppio (vedasi **Esercizio 56**), allora $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}$
 $[x, \varepsilon] \mapsto x$ è un omeomorfismo locale (un po' patologico...).

Proposizione 3.9.1. Un omeomorfismo locale è una mappa aperta (ma non necessariamente chiusa).

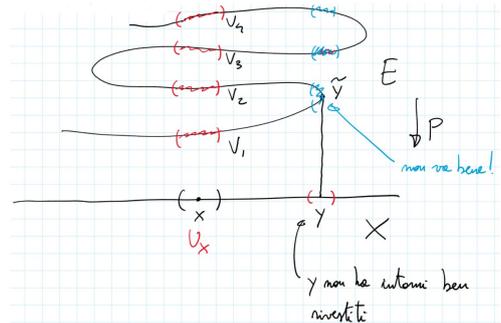
Dimostrazione. Sia U_x un aperto che contiene x tale che $f|_{U_x} : U_x \rightarrow V_{f(x)}$ sia un omeomorfismo $\forall x \in X$, con $V_{f(x)}$ aperto in Y . Dato $\Omega \subseteq X$ aperto,

$$f(\Omega) = f\left(\Omega \cap \left(\bigcup_{x \in X} U_x\right)\right) = f\left(\bigcup_{x \in X} (\Omega \cap U_x)\right) = \bigcup_{x \in X} f(\Omega \cap U_x)^{15}$$

quindi $f(\Omega)$ è unione arbitraria di aperti ed è perciò aperto. □

Definizione 3.9.2. Una funzione continua $p : E \rightarrow X$ si dice **rivestimento**, se

1. X è connesso per archi;
2. $\forall x \in X \exists U_x$ intorno di x in X tale che $p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$,
 V_i è aperto in $E \forall i \in I$ e $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U_x$ è un omeomorfismo $\forall i \in I$.



E si chiama **spazio totale** del rivestimento, X **spazio base** e un U_x come in 2. si chiama **intorno ben rivestito** (o **banalizzante**).

Proposizione 3.9.2. Un rivestimento è un omeomorfismo locale e dunque una mappa aperta.

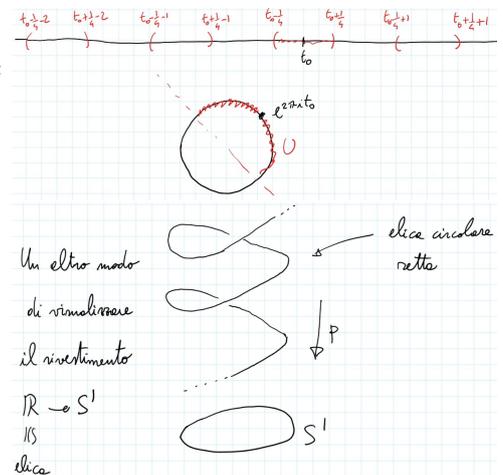
Dimostrazione. Dati $p : E \rightarrow X$ rivestimento e $\tilde{x} \in E$, siano U_x un intorno ben rivestito di $x = p(\tilde{x})$ e $V \subseteq \bigsqcup_{i \in I} V_i = p^{-1}(U_x)$ il $V_i \ni \tilde{x} \implies p|_V : V \rightarrow U_x$ è un omeomorfismo tra intorni aperti di \tilde{x} e x . □

Esempio 69. $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = e^{2\pi i t}$ è un rivestimento.

Infatti, dato $x_0 = e^{2\pi i t_0}$, sia $U = \{e^{2\pi i t} : |t - t_0| < \frac{1}{4}\}$ e abbiamo

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(t_0 + k - \frac{1}{4}, t_0 + k + \frac{1}{4}\right) \subseteq \mathbb{R}$$

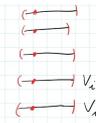
Poiché gli intervalli $(t_0 + k - \frac{1}{4}, t_0 + k + \frac{1}{4})$ sono a due a due disgiunti, sono aperti e la restrizione di p a ciascuno di essi è un omeomorfismo su U , si ha che p è un rivestimento.



¹⁵Ciascuno di essi è aperto in $V_{f(x)}$, dunque in Y (aperto di un aperto è aperto).

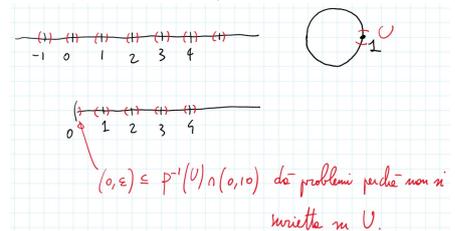
Definizione 3.9.3. Dato un rivestimento $p : E \rightarrow X$, l'insieme $p^{-1}(x) \subseteq E$ si chiama **fibra** di x e la cardinalità $|p^{-1}(x)|$ (che non dipende da x) si chiama **grado** di p .

Teorema 3.9.3. Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento, allora le fibre di p hanno cardinalità costante, cioè $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)| \forall x, y \in X$ ¹⁶.

Dimostrazione. Dato $x \in X$, sia $W_x = \{y \in X : |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)|\}$. Mostriamo che W_x è aperto e, a questo scopo, vediamo che, se $y \in W_x$ e U è un intorno ben rivestito di y , allora $U \subseteq W_x$: in questo modo W_x sarà intorno di ogni suo punto e sarà perciò aperto. 
 $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$, con $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ bigettiva $\forall i \in I$, dunque è chiaro che $\forall z \in U$
 $p^{-1}(z) \subseteq \bigsqcup_{i \in I} V_i$ e $p^{-1}(z) \cap V_i = 1 \forall i \in I$, dunque $|p^{-1}(z)| = |I| = |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)|$,
cioè $z \in W_x$ e $U \subseteq W_x$. Dunque W_x è aperto, ma anche $X \setminus W_x$ lo è ($y \notin W_x \implies |p^{-1}(y)| \neq |p^{-1}(x)|$) ed $\exists U$ intorno di y tale che $|p^{-1}(z)| = |p^{-1}(y)| \neq |p^{-1}(x)| \forall z \in U$. Poiché X è connesso e $W_x \neq \emptyset$, $W_x = X$. \square

Esempio 70 (Omeomorfismo locale surgettivo che non è un rivestimento).

$p|_{(0,10)} : (0, 10) \rightarrow S^1$, con $p(t) = e^{2\pi it}$, è un omeomorfismo locale (in quanto $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, con $p(t) = e^{2\pi it}$, lo è e la restrizione di un omeomorfismo locale ad un aperto è un omeomorfismo locale), ma non è un rivestimento, ad esempio, perché $|p|_{(0,10)}^{-1}(1)| = 9$ mentre $|p|_{(0,10)}^{-1}(\frac{1}{2})| = 10$. In effetti $1 \in S^1$ non ha intorni ben rivestiti.



Osservazione 81. Essendo un omeomorfismo locale, un rivestimento è sempre una mappa aperta, ma esistono rivestimenti che non sono chiusi: preso $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ come nell'**Esempio 69** e posto $C = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, C è chiuso, ma $p(C) = \{e^{2\pi i(n + \frac{1}{n})} \mid n \geq 2\} = \{e^{\frac{2\pi i}{n}} \mid n \geq 2\}$ per cui $1 \in \overline{p(C)}$, ma $1 \notin p(C)$.

Teorema 3.9.4. Dato X topologico connesso per archi, se $G \times X \rightarrow X$ è un'azione propriamente discontinua, allora la proiezione $\pi : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.

Dimostrazione. Siano $[x] \in X/G$ e $x \in X$ un suo rappresentante. Per definizione di propria discontinuità, $\exists W_x$ intorno aperto di x in X tale che $g \cdot W_x \cap W_x = \emptyset \forall g \neq 1$. Poniamo $U_x = \pi(W_x)$ e mostriamo che U_x è ben rivestito e aperto. Le proiezioni per azioni di gruppo sono sempre aperte, per cui $U_x = \pi(W_x)$ è aperto. Sappiamo anche che $\pi^{-1}(U_x) = \pi^{-1}(\pi(W_x)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot W_x$. Per con-

cludere, dobbiamo vedere che $g \cdot W_x \cap g' \cdot W_x = \emptyset$, per $g \neq g'$, (così l'unione sarà disgiunta) e che $\pi|_{g \cdot W_x} : g \cdot W_x \rightarrow U_x$ è un omeomorfismo $\forall g \in G$. $g \cdot W_x \cap g' \cdot W_x \neq \emptyset \implies g^{-1} \cdot (g \cdot W_x \cap g' \cdot W_x) \neq \emptyset \implies g^{-1} \cdot g \cdot W_x \cap g^{-1} \cdot g' \cdot W_x \neq \emptyset \implies W_x \cap g^{-1} \cdot g' \cdot W_x \neq \emptyset \implies$ ¹⁷ $g^{-1}g' = 1$, cioè $g = g'$.

Infine, $\pi|_{g \cdot W_x} : g \cdot W_x \rightarrow U_x$ è continua e aperta, in quanto π lo è e $g \cdot W_x$ è aperto, è surgettiva, perché $\pi|_{W_x} : W_x \rightarrow U_x$ lo è e g agisce tramite bigezioni, ed è iniettiva, perché $W_x \cap g \cdot W_x = \emptyset \forall g \neq 1$, per cui in W_x non esistono coppie di punti distinti G -equivalenti. \square

Corollario 3.9.5. La mappa
$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ v & \longmapsto & [v] \end{array}$$
 è un rivestimento di grado 2 $\forall n \geq 1$.

Dimostrazione. Abbiamo visto che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\pm \text{Id}$ e $\pm \text{Id}$ agisce in maniera propriamente discontinua su S^n (ad esempio, perché l'azione è vagante¹⁸ e libera, perché $-\text{Id}$ non fissa alcun punto di S^n). Che il grado sia 2 è ovvio: $|G| =$ ¹⁹ $|fibra| = 2$. \square

Anche il rivestimento
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi it} \end{array}$$
 si ottiene come quoziente di \mathbb{R} rispetto all'azione per traslazioni di \mathbb{Z} , azione che è propriamente discontinua.

Vedremo che non tutti i rivestimenti sono indotti da azioni di gruppo propriamente discontinue.

¹⁶Qui è fondamentale che X sia connesso.

¹⁷Per propria discontinuità.

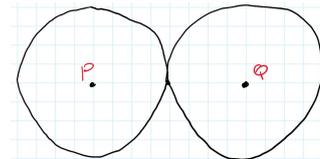
¹⁸Qui G è finito!

¹⁹Sempre vero quando l'azione è libera.

Esercizi IV settimana

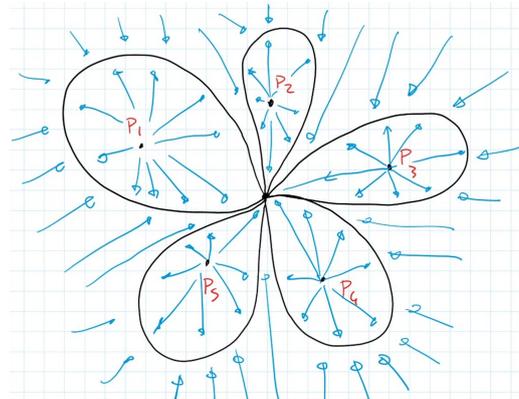
Esercizio 64. Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$, dove $P = (-1, 0)$ e $Q = (1, 0)$, e sia

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x-1)^2 + y^2 - 1)((x+1)^2 + y^2 - 1) = 0\}.$$

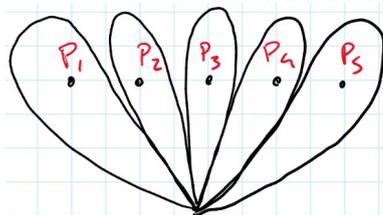


Si mostri che Y è un retratto di deformazione di X .

Dimostrazione. Dimostriamo più in generale che, se F è un sottoinsieme finito di \mathbb{R}^2 , allora $\mathbb{R}^2 \setminus F$ si retrae per deformazione (e perciò è omotopicamente equivalente) sul bouquet di $|F|$ circonferenze.



La disposizione dei punti non conta:



□

In realtà non è difficile dimostrare che, se $|F| = |F'| < +\infty$, allora $\mathbb{R}^2 \setminus F$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus F'$; anzi esiste un omeomorfismo

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F \longmapsto F'.$$

Esercizio 63. Sia $Y \subseteq X$ un retratto di X e sia $i: Y \rightarrow X$ l'inclusione. Sia anche $x_0 \in Y$. Si mostri che la mappa

$$i_*: \pi_1(Y, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

è iniettiva.

Dimostrazione. Siano $i: Y \hookrightarrow X$ l'inclusione e $r: X \rightarrow Y$ la retrazione, dunque $r \circ i = \text{Id}_Y$. Per funtorialità, poiché $r \circ i = \text{Id}_Y$,

$$r_* \circ i_*: \pi_1(Y, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, x_0)$$

è l'identità (in quanto è uguale a $(r \circ i)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{\pi_1(Y, x_0)}$). Dunque $r_* \circ i_*$ è bigettiva, perciò i_* è iniettiva e r_* è surgettiva. □

Attenzione! Se $f: X \rightarrow Y$ è iniettiva, allora $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ può benissimo non esserlo! Ad esempio, vedremo che $\pi_1(S^1, x_0) \neq \{1\}$, mentre sappiamo che $\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) = \{1\}$, dunque, anche se l'inclusione $i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è iniettiva, $i_*: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0)$ non lo è.

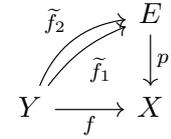
3.10 Teoria dei sollevamenti

D'ora in poi, per semplicità, tutti gli spazi saranno localmente connessi per archi.

Inoltre, poiché connesso + localmente connesso per archi \implies connesso per archi, in particolare, gli spazi base dei rivestimenti saranno connessi per archi.

Teorema 3.10.1 (Unicità dei sollevamenti).

Siano $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, Y uno spazio connesso, $f : Y \rightarrow X$ continua e $y_0 \in Y$. Se $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow E$ **sollevano** f , cioè $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2 = f$ e $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$, allora $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.



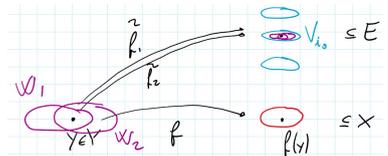
“Se \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 coincidono in un punto, coincidono ovunque.”

Dimostrazione. Sia $\Omega = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$, quindi $y_0 \in \Omega$, per cui $\Omega \neq \emptyset$ e dunque, per connessione di Y , basta verificare che Ω sia aperto e chiuso.

Ω è *aperto*: dato $y \in \Omega$, sia $U \subseteq X$ un intorno ben rivestito di $f(y) = p(\tilde{f}_1(y)) = p(\tilde{f}_2(y))$, quindi $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ e $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) \in p^{-1}(U)$, dunque $\exists i_0 \in I$ tale che $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) \in V_{i_0}$.

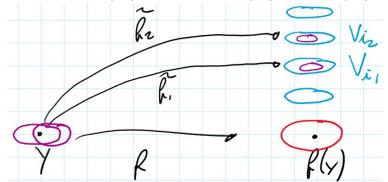
Per continuità di \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 , poiché V_{i_0} è aperto ed è perciò un intorno di $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, $\exists W_1, W_2$ intorni di y tali che $\tilde{f}_1(W_1) \subseteq V_{i_0}$ e $\tilde{f}_2(W_2) \subseteq V_{i_0}$.

Posto $W = W_1 \cap W_2$, abbiamo $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : W \rightarrow V_{i_0}$ e $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$, ma $p|_{V_{i_0}}$ è iniettiva, per cui $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ su W . Dunque $W \subseteq \Omega$, cioè Ω è intorno di ogni suo punto e perciò è aperto.



Ω è *chiuso*: vediamo che Ω^c è aperto. Sia $y \in \Omega^c$ tale che $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$. Tuttavia $p \circ \tilde{f}_1(y) = p \circ \tilde{f}_2(y) = f(y)$. Siano U, V_i , con $i \in I$, come sopra, allora $\tilde{f}_1(y) \in V_{i_1}$ e $\tilde{f}_2(y) \in V_{i_2}$. Diciamo che $i_1 \neq i_2$, perché, se $V_{i_1} = V_{i_2}$, poiché $p|_{V_{i_1}}$ è iniettiva, da $p \circ \tilde{f}_1(y) = p \circ \tilde{f}_2(y)$ otterremo $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) \notin \Omega^c$.

Per continuità, $\exists W_1, W_2$ intorni di y tali che $\tilde{f}_1(W_1) \subseteq V_{i_1}$ e $\tilde{f}_2(W_2) \subseteq V_{i_2}$, ma, se $W = W_1 \cap W_2$, allora



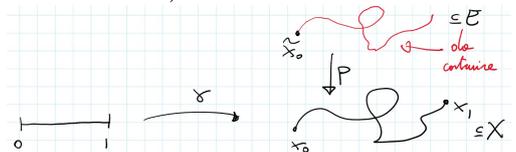
$$\tilde{f}_1(W) \cap \tilde{f}_2(W) \subseteq V_{i_1} \cap V_{i_2} = \emptyset$$

dunque $\forall z \in W, \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \implies z \in \Omega^c \implies W \subseteq \Omega^c \implies \Omega^c$ è aperto ²⁰.

□

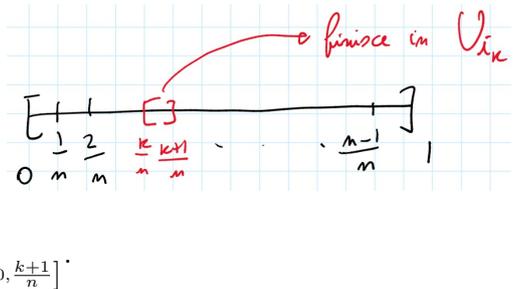
Teorema 3.10.2 (Esistenza e unicità del sollevamento di cammini).

Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento, $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_1)$, cioè $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, e $\tilde{x}_0 \in E$ è un punto fissato della fibra $p^{-1}(x_0)$, allora $\exists! \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$ continuo tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.



Dimostrazione. L'unicità segue immediatamente dal **Teorema 3.10.1**.

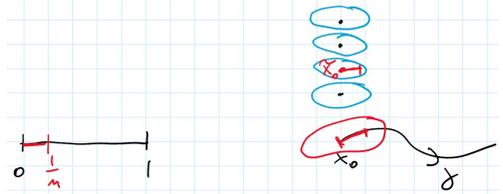
Vediamo l'*esistenza*: ricopriamo X con intorni aperti ben rivestiti, ottenendo un ricoprimento aperto $\Omega = \{U_i\}_{i \in I}$. Poiché γ è continuo, $\{\gamma^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di $[0, 1]$, che è compatto, per cui $\exists \varepsilon > 0$ numero di Lebesgue per tale ricoprimento. Scelto $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$, abbiamo che $\forall k = 0, \dots, n-1, \gamma\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq U_{i_k}$ per qualche $i_k \in I$. Mostriamo per induzione su $k \geq 1$ che sappiamo sollevare $\gamma|_{\left[0, \frac{k+1}{n}\right]}$.



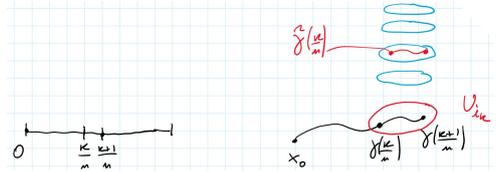
²⁰È intorno di ogni suo punto.

Passo base, $k = 1$: $\gamma([0, \frac{1}{n}]) \subseteq U_{i_0}$ e $x_0 = \gamma(0) \in U_{i_0}$, $p^{-1}(U_{i_0}) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ e scegliamo l'unico $\bar{j} \in J$ tale che $\tilde{x}_0 \in V_{\bar{j}}$.
 $(p|_{V_{\bar{j}}})^{-1} : U_{i_0} \rightarrow V_{\bar{j}}$ è un omeomorfismo e poniamo

$$\tilde{\gamma}|_{[0, \frac{1}{n}]} = (p|_{V_{\bar{j}}})^{-1} \circ \gamma|_{[0, \frac{1}{n}]}$$



Il passo induttivo è in realtà identico al passo iniziale: una volta sollevato γ su $[0, \frac{k}{n}]$, cioè avendo definito $\tilde{\gamma} : [0, \frac{k}{n}] \rightarrow E$ tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, sia U_{i_k} l'intorno ben rivestito che contiene $\gamma([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])$.



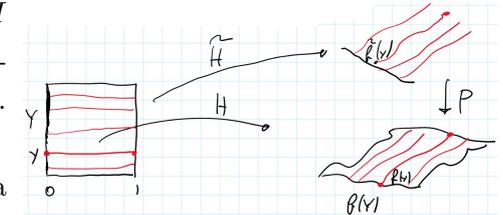
Visto che $p^{-1}(U_{i_k}) = \bigsqcup_{j \in J} W_j$, scegliamo \bar{j} tale che $\tilde{\gamma}([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])$ (che è già definito!) appartenga a $W_{\bar{j}}$ e poniamo $\tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} = (p|_{W_{\bar{j}}})^{-1} \circ \gamma|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$. Poiché $\gamma|_{[0, \frac{k}{n}]}$ e $\gamma|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ sono continui e coincidono in $\frac{k}{n}$, la loro giunzione è continua e definisce $\tilde{\gamma}$ su $[0, \frac{k+1}{n}]$. \square

Notazione: Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\alpha(x_0))$, allora denoteremo con $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ l'unico sollevamento di α a partire da \tilde{x}_0 .

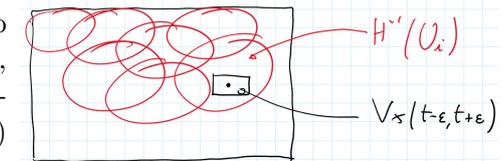
Teorema 3.10.3 (Sollevamento delle omotopie).

Siano $p : E \rightarrow X$ rivestimento, $f : Y \rightarrow X$ e $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ sollevamento di f , cioè $p \circ \tilde{f} = f$. Se dunque $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ è un'omotopia tale che $H_0 = f$, cioè $H(y, 0) = f(y) \forall y \in Y$, allora $\exists \tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$ che solleva H , cioè $p(\tilde{H}(y, t)) = H(y, t) \forall y \in Y$ e $t \in [0, 1]$.

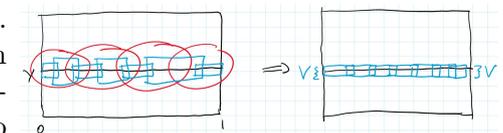
Dimostrazione. $\forall y \in Y$ $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow X$, con $\gamma_y(t) = H(y, t)$, è un cammino continuo, per cui ammette un sollevamento $\tilde{\gamma}_{\tilde{f}(y)} : [0, 1] \rightarrow E$ tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{f}(y)$. Se l' \tilde{H} richiesta esiste, $t \mapsto \tilde{H}(y, t)$ e $t \mapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{f}(y)}(t)$ sono sollevamenti di γ_y con lo stesso punto iniziale, perciò devono coincidere. Dunque poniamo $\tilde{H}(y, t) = \tilde{\gamma}_{\tilde{f}(y)}(t)$.



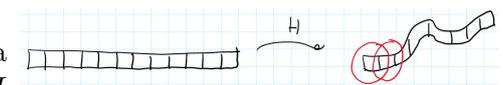
Bisogna verificare che \tilde{H} sia continua. L'idea è identica a quella per il sollevamento dei cammini. Prendiamo un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti ben rivestiti di X , ne consideriamo la preimmagine $\{H^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ che dà un ricoprimento aperto di $Y \times [0, 1]$. Per definizione di topologia prodotto, $\forall (y, t) \in Y \times [0, 1]$ troviamo un aperto V_y di Y e un intervallo aperto $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ tale che $V_y \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq H^{-1}(U_{i_0})$ per qualche $i_0 \in I$.



Perciò, fissato $y \in Y$, possiamo ricoprire $\{y\} \times [0, 1]$ con aperti prodotto come sopra, ciascuno contenuto in qualche $H^{-1}(U_i)$. Per compattezza di $\{y\} \times [0, 1] \cong [0, 1]$, possiamo scegliere un numero finito di tali rettangolini $V_1 \times I_1, \dots, V_k \times I_k$, dove i V_i sono aperti di Y che contengono y e gli I_i sono intervallini. Posto $V_y = V_1 \cap \dots \cap V_k$, abbiamo $\{y\} \times [0, 1] \subseteq (V_y \times I_1) \cup \dots \cup (V_y \times I_k)$ e $V_y \times I_j \subseteq H^{-1}(U_{i_j})$ per qualche U_{i_j} ben rivestito.



Per concludere, basta vedere che \tilde{H} sia effettivamente continua su $V_y \times [0, 1]$ ^a. L'idea è di sollevare (induttivamente su k) H ad \tilde{H} su $V_y \times [0, \frac{k}{n}]$, esattamente come abbiamo fatto per i cammini. Poiché Y è localmente connesso per archi, possiamo supporre Y connesso per archi.



^aCosì, al variare di $y \in Y$, avremo dimostrato che è continua su un ricoprimento aperto di $Y \times [0, 1]$, quello dato dai vari $V_y \times [0, 1]$.

Sia $H(V_y \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subseteq U_{i_k}$.

Al passo base (cioè quando guardiamo $V_y \times [0, \frac{1}{n}]$) abbiamo $p^{-1}(U_{i_0}) = \bigsqcup_{j \in J} W_j$. Poiché V_y è connesso, $\tilde{f}(V_y \times \{0\}) \subseteq W_{\bar{j}}$

per qualche $\bar{j} \in J$, in quanto $\tilde{f}(V_y) = \bigsqcup_{j \in J} (\tilde{f}(V_y) \cap W_j)$, i W_j

sono aperti e $\tilde{f}(V_y)$ è connesso.

Detta $s_0 : U_{i_0} \rightarrow W_{\bar{j}}$ l'inversa continua di $p|_{W_{\bar{j}}}$, poniamo

$$\tilde{H}_{V_y \times [0, \frac{1}{n}]} = s_0 \circ H|_{V_y \times [0, \frac{1}{n}]}$$

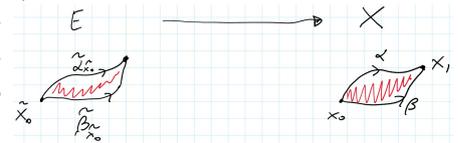
Una volta definita \tilde{H} su $V \times [0, \frac{k}{n}]$, esattamente come al passo base, abbiamo $H(V_y \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subseteq U_{i_k}$, per connessione di V , $\tilde{H}(V_y \times \{\frac{k}{n}\})$ (che è già definito!) è contenuto in uno solo dei fogli di $p^{-1}(U_{i_k})$, diciamo Z , e, detta $s_k : U_{i_k} \rightarrow Z$

l'inversa di $p|_Z$, poniamo $\tilde{H}_{V_y \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} = s_k \circ \tilde{H}$.

Poiché $V_y \times [0, \frac{k}{n}]$, $V_y \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ sono un ricoprimento chiuso finito di $V_y \times [0, \frac{k+1}{n}]$ e la \tilde{H} così definita è continua su ciascuno di essi, \tilde{H} è continua su $V_y \times [0, \frac{k+1}{n}]$, dunque al termine del procedimento induttivo avremo che è continua su tutto $V_y \times [0, 1]$. È evidente che questa \tilde{H} coincide con quella definita inizialmente su tutto $Y \times [0, 1]$, in quanto entrambe, quando ristrette a $\{y\} \times [0, 1]$, sollevano il cammino $t \mapsto H(y, t)$ a partire da $f(y)$. \square

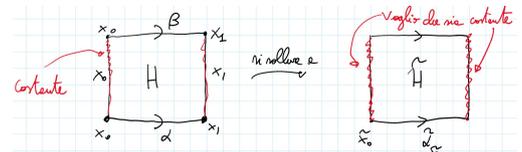
Corollario 3.10.4 (Sollevamento delle omotopie di cammini).

Siano $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_1)$ omotopi come cammini (cioè a estremi fissi). Se $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}, \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ sono omotopi come cammini (in particolare hanno lo stesso punto finale).



Dimostrazione. Sia H un'omotopia a estremi fissi tra α e β . Per quanto visto prima, H si solleva a $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ tale che $\tilde{H}_0 = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ e $p \circ \tilde{H} = H$.

La mappa $s \mapsto \tilde{H}(0, s)$ è un sollevamento del cammino costante in x_0 a partire da \tilde{x}_0 . Per unicità dei sollevamenti, è il cammino costante in \tilde{x}_0 . Analogamente, $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$ è costante, dunque \tilde{H} è un'omotopia di cammini. In particolare, $t \mapsto \tilde{H}(t, 1)$ è un sollevamento di β (in quanto $p \circ \tilde{H} = H$ e $H_1 = \beta$) con punto iniziale \tilde{x}_0 (poiché $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{x}_0$ come appena dimostrato), dunque $\tilde{H}_1 = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$. \square



Applicheremo il **Corollario 3.10.4** soprattutto al caso in cui $x_0 = x_1$. In tal caso, tale **Corollario 3.10.4** ci dice che, se α e β sono due rappresentanti dello stesso elemento di $\pi_1(X, x_0)$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(1)$ ²¹.

Corollario 3.10.5. Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento, $\tilde{x}_0 \in E$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, allora la mappa $p_* : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è iniettiva.

Dimostrazione. Sia $[\alpha] \in \text{Ker } p_*$, quindi $p \circ \alpha$ è omotopo a estremi fissi alla costante c_{x_0} . Per quanto visto sopra, ne segue che $(p \circ \alpha)_{\tilde{x}_0}$ è omotopo a estremi fissi a $(c_{x_0})_{\tilde{x}_0}$, ma, per unicità dei sollevamenti, $(c_{x_0})_{\tilde{x}_0} = c_{\tilde{x}_0}$, $(p \circ \alpha)_{\tilde{x}_0} = \alpha$, dunque α è omotopo a estremi fissi a $c_{\tilde{x}_0}$, cioè $[\alpha] = 1$ in $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$. \square

²¹Cioè i sollevamenti di α e β con lo stesso punto iniziale hanno anche lo stesso punto finale.

3.11 Azione di monodromia

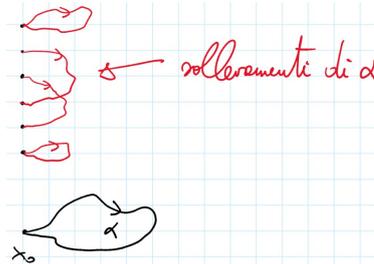
Oltre alle azioni sinistre, esistono anche le azioni destre, cioè, dati un gruppo G e un insieme X , mappe

$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\longmapsto x \cdot g \end{aligned} \quad \text{tali che } x \cdot 1 = x \quad \forall x \in X \text{ e } x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h \quad \forall x \in X \text{ e } \forall g, h \in G.$$

Le nozioni di orbita, stabilizzatore, azione transitiva o libera sono identiche al caso delle azioni sinistre.

Teorema 3.11.1. *Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento, $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$, allora esiste una ben definita **azione di monodromia** (destra) data da*

$$\begin{aligned} F \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow F \\ (\tilde{x}, [\alpha]) &\longmapsto \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \end{aligned}$$



Dimostrazione. Che $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)$ non dipenda dal rappresentante α lo abbiamo già osservato. Inoltre $\forall \tilde{x} \in F$

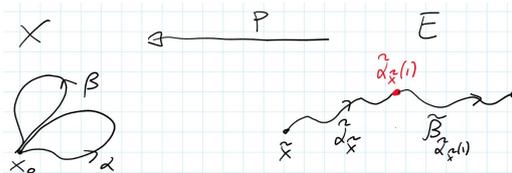
$$\tilde{x} \cdot 1 = \tilde{x} \cdot [c_{x_0}] = (\tilde{c}_{x_0})_{\tilde{x}}(1) = c_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$$

$$\tilde{x} \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]) = \tilde{x} \cdot [\alpha * \beta] = \widetilde{\alpha * \beta}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}} * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \cdot [\beta] = (\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$$

□

Abbiamo usato (e lo useremo spesso) il fatto che

$$(\alpha * \beta)_{\tilde{x}} = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}} * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}$$



Teorema 3.11.2. *Fissati un rivestimento $p : E \rightarrow X$, $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$,*

① *l'azione di monodromia di $\pi_1(X, x_0)$ su F è transitiva $\iff E$ è connesso per archi;*

② $\forall \tilde{x} \in F \quad p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \text{Stab}(\tilde{x}).$

Dimostrazione. ① (\Leftarrow) Dati $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$, poiché E è connesso per archi, $\exists \tilde{\alpha} \in \Omega(E, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Posto $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$, α è un loop basato in x_0 e $\tilde{x}_1 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}(1) = \tilde{x}_2$.

(\Rightarrow) Per **Esercizio** 23.

② Se $[\alpha] \in \text{Stab}(\tilde{x})$, allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$, dunque $\tilde{\alpha}$ è un loop e $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(E, \tilde{x})$. Per costruzione,

$$[\alpha] = [p \circ \tilde{\alpha}] = p_*([\tilde{\alpha}]) \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$$

Viceversa, se $g \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$, allora $g = [p \circ \tilde{\alpha}]$, con $\tilde{\alpha}$ loop basato in \tilde{x} , per cui

$$\tilde{x} \cdot g = \tilde{x} \cdot [p \circ \tilde{\alpha}] = \widetilde{p \circ \tilde{\alpha}}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$$

dunque $g \in \text{Stab}(\tilde{x})$. □

Corollario 3.11.3. *Se X ammette un rivestimento connesso non banale (cioè di grado $\neq 1$), allora $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\} \quad \forall x_0 \in X$, cioè X non è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Poiché $\deg p > 1$, si ha $|F| = |p^{-1}(x_0)| > 1$. Inoltre, visto che $\pi_1(X, x_0)$ agisce transitivamente su F 25, segue che $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$. □

Corollario 3.11.4. S^1 non è semplicemente connesso.

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, con $n \geq 1$, non è semplicemente connesso.

²²Per unicità dei sollevamenti.

²³Vedasi **Esercizi V settimana, Esercizio 67**.

²⁴Perché $\tilde{\alpha}$ è un loop.

²⁵Ricordiamoci che siamo sotto l'ipotesi di locale connessione per archi, dunque E connesso è connesso per archi.

3.12 $\pi_1(S^1)$

Teorema 3.12.1. $\pi_1(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Infatti, fissato il rivestimento $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ $t \mapsto e^{2\pi it}$ e posto $x_0 = p(0) = 1 \in S^1$, la mappa

$$\psi: \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$[\alpha] \longmapsto 0 \cdot [\alpha]$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. ψ è ben definito, perché effettivamente la fibra di 1 è \mathbb{Z} .

ψ è un omomorfismo, perché

$$\psi([\alpha] \cdot [\beta]) = \psi([\alpha * \beta]) = (\widetilde{\alpha * \beta})_0(1) = \widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta}_{\widetilde{\alpha}_0(1)}(1) = \widetilde{\beta}_{\widetilde{\alpha}_0(1)}(1)$$

Chi è $\widetilde{\beta}_{\widetilde{\alpha}_0(1)}$? Se $\widetilde{\beta}_0$ solleva β a partire da 0, allora il cammino $t \mapsto \widetilde{\alpha}_0(1) + \widetilde{\beta}_0(t)$ solleva ancora β ²⁶ e ha punto iniziale in $\widetilde{\alpha}_0(1)$.

Dunque $\widetilde{\beta}_{\widetilde{\alpha}_0(1)}: t \mapsto \widetilde{\alpha}_0(1) + \widetilde{\beta}_0(t)$, perciò $\widetilde{\beta}_{\widetilde{\alpha}_0(1)}(1) = \widetilde{\alpha}_0(1) + \widetilde{\beta}_0(1)$.

Ricapitolando,

$$\psi([\alpha] \cdot [\beta]) = 0 \cdot [\alpha * \beta] = \widetilde{\alpha}_0 * \widetilde{\beta}_{\widetilde{\alpha}_0(1)}(1) = \widetilde{\beta}_{\widetilde{\alpha}_0(1)}(1) = \widetilde{\alpha}_0(1) + \widetilde{\beta}_0(1) = 0 \cdot [\alpha] + 0 \cdot [\beta] = \psi([\alpha]) + \psi([\beta])$$

ψ è surgettivo, perché \mathbb{R} è connesso per archi e perciò, per il **Teorema 3.11.2**, la monodromia è transitiva.

ψ è iniettivo, perché $\text{Ker } \psi = \{[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1) \mid 0 \cdot [\alpha] = 0\} = \text{Stab}(0) = p_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0)) = \{1\}$, in quanto \mathbb{R} è contraibile e dunque semplicemente connesso. \square

La dimostrazione dice anche che un rappresentante dell'elemento $n \in \mathbb{Z}$ è $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$ $t \mapsto e^{2\pi int}$,

in quanto tale α si solleva ad $\widetilde{\alpha}_0(t) = nt$ che ha punto finale n .

²⁶Perché $\widetilde{\alpha}_0(1) \in \mathbb{Z}$, per cui $e^{\widetilde{\alpha}_0(1) + \widetilde{\beta}_0(t)} = e^{\widetilde{\beta}_0(t)} = \beta(t)$.

3.13 Teorema del punto fisso di Brouwer

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si retrae su S^1 . Ora, possiamo anche dimostrare che invece \mathbb{R}^2 NON si può retrarre su S^1 , in quanto l'inclusione di un retratto induce una mappa iniettiva nel π_1 (vedasi l'Esercizio 63), ma $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ mentre $\pi_1(\mathbb{R}^2) = \{1\}$. Per lo stesso motivo vale il seguente

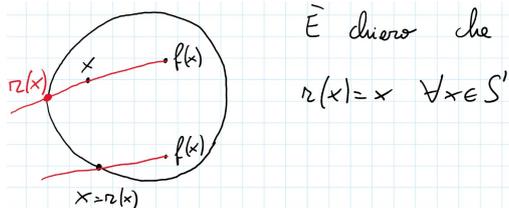
Lemma 3.13.1. S^1 non è un retratto di D^2 .

Dimostrazione. Se lo fosse, $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ indurrebbe $i_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(D^2)$ iniettiva \neq poiché D^2 è stellato e dunque contraibile, mentre $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. \square

Teorema 3.13.2 (Brouwer).

Se $f : D^2 \rightarrow D^2$ è continua, allora f ha un punto fisso, cioè $\exists x \in D^2$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista $f : D^2 \rightarrow D^2$ continua tale che $f(x) \neq x \forall x \in D^2$. Costruiamo una retrazione $r : D^2 \rightarrow S^1$ a partire da f come segue: sia $r(x)$ il punto di intersezione tra S^1 e la semiretta uscente da $f(x)$ che passa da x (tale semiretta è ben definita proprio perché $f(x) \neq x$). Dobbiamo verificare che r sia continua, usando la continuità di f . Per trovare $r(x)$, cerchiamo $t > 0$ tale che $\|f(x) + t(x - f(x))\|^2 = 1$, cioè



$$\langle f(x) + t(x - f(x)), f(x) + t(x - f(x)) \rangle = 1 \iff \|f(x)\|^2 + 2t\langle f(x), x - f(x) \rangle + t^2\|x - f(x)\|^2 = 1$$

Questa è un'equazione di secondo grado, la cui unica soluzione positiva ²⁷ è una funzione continua di x ed $f(x)$, dunque è una funzione continua di x , che chiamiamo $t(x)$. Perciò $r(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$ è una funzione continua di x . \square

Il **Teorema di Brouwer** è vero in ogni dimensione per lo stesso motivo: S^{n-1} non è retratto di D^n ; tuttavia, per dimostrare quest'ultimo fatto, il π_1 non basta. Per calcolare il π_1 di altri spazi, useremo l'invarianza omotopica ²⁸ e altri strumenti, ad esempio il **Teorema di Van Kampen**.

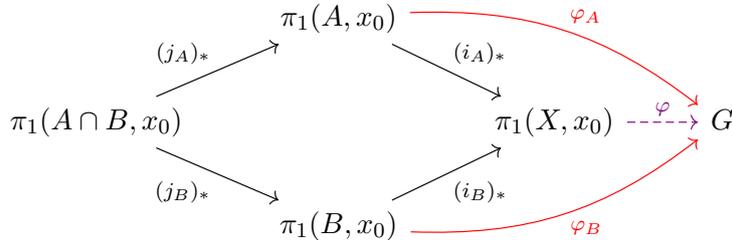
²⁷Sappiamo che è unica per motivi geometrici.

²⁸Ad esempio, poiché $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^1$, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

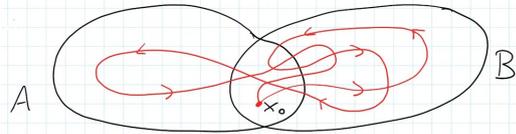
3.14 Teorema di Van Kampen

Teorema 3.14.1 (Van Kampen).

Siano X topologico, A, B aperti di X tali che $X = A \cup B$ e $x_0 \in A \cap B$. Supponiamo che A, B e $A \cap B$ siano connessi per archi. Vale il seguente fatto: se $i_A : A \rightarrow X$, $i_B : B \rightarrow X$, $j_A : A \cap B \rightarrow A$ e $j_B : A \cap B \rightarrow B$ sono le inclusioni, G è un gruppo e $\varphi_A : \pi_1(A, x_0) \rightarrow G$ e $\varphi_B : \pi_1(B, x_0) \rightarrow G$ sono omomorfismi tali che $\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_* : \pi_1(A \cap B, x_0) \rightarrow G$, allora $\exists! \varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ omomorfismo tale che $\varphi_A = \varphi \circ (i_A)_*$ e $\varphi_B = \varphi \circ (i_B)_*$.



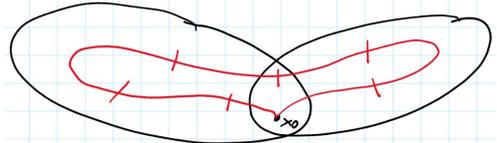
Inoltre, $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ e $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$.



Dimostrazione. Proviamo a definire $\varphi([\alpha])$, con $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Se $\text{Imm } \alpha \subseteq A$, allora dovremo porre $\varphi([\alpha]) = \varphi_A([\alpha])$. Stessa cosa, se $\text{Imm } \alpha \subseteq B$.

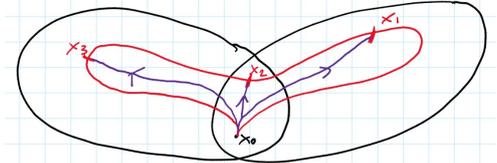
$$\in \pi_1(X, x_0) \quad \in \pi_1(A, x_0)$$

L'idea è di suddividere α in parti tutte contenute in A o in B .



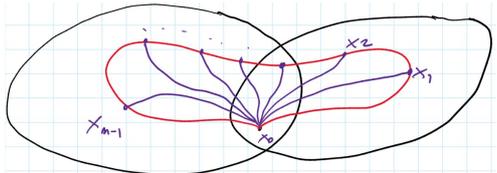
Però dobbiamo anche rendere ciascuna delle parti ottenute un laccio.

Per $x \in A \cap B$, scegliamo il cammino $\gamma_x \in \Omega(A \cap B, x_0, x)$, per $x \in A \setminus (A \cap B)$, $\gamma_x \in \Omega(A, x_0, x)$, mentre, per $x \in B \setminus (A \cap B)$, $\gamma_x \in \Omega(B, x_0, x)$ ^a. Infine, per $x = x_0$, prendiamo $\gamma_x = c_{x_0}$ costante.



^aLo possiamo fare perché A, B e $A \cap B$ sono connessi per archi.

Andando “avanti e indietro” lungo i γ_{x_i} viola, abbiamo decomposto (a meno di omotopia) il generico laccio rosso in più lacci, ciascuno dei quali è contenuto tutto in A o tutto in B .



Formalmente, dato un laccio $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, poiché $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ è un ricoprimento aperto del compatto $[0, 1]$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n}$ ne sia un numero di Lebesgue, cioè

$$\alpha\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq A \text{ oppure } \alpha\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq B \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

Posto $x_k = \alpha\left(\frac{k}{n}\right)$, definiamo $\alpha_k = \gamma_{x_k} * \alpha|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} * \gamma_{x_{k+1}}^{-1}$.

Per come abbiamo scelto i γ_x , l'immagine di α_k è tutta in A , in B o in $A \cap B$, se $\alpha\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right)$ lo è. Inoltre, considerando l'omotopia a estremi fissi in $x_0 = x_n$, abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_0 * \dots * \alpha_{n-1} &= \left(c_{x_0} * \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * \gamma_{x_1}^{-1}\right) * \left(\gamma_{x_1} * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * \gamma_{x_2}^{-1}\right) * \dots * \left(\gamma_{x_{n-1}} * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} * c_{x_0}^{-1}\right) = \\ &= c_{x_0} * \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * \left(\gamma_{x_1}^{-1} * \gamma_{x_1}\right) * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * \left(\gamma_{x_2}^{-1} * \gamma_{x_2}\right) * \dots * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} * c_{x_0}^{-1} \sim \\ &\sim c_{x_0} * \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * c_{x_1} * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * c_{x_2} * \alpha|_{\left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right]} * \dots * c_{x_0}^{-1} \sim \\ &\sim \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * \dots * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} = \alpha \end{aligned}$$

Poiché ciascun α_i è un loop in $\Omega(A, x_0, x_0)$ o in $\Omega(B, x_0, x_0)$, abbiamo già dimostrato che $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0)) \cup (i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$, in quanto il generico loop $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$ è omotopo a una concatenazione di loop ciascuno dei quali è contenuto tutto in A o tutto in B .

Volendo definire $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ in modo che il diagramma commuti, dobbiamo porre per forza

$$\varphi([\alpha]) = \varphi_0([\alpha_0]) \circ \varphi_1([\alpha_1]) \circ \cdots \circ \varphi_{n-1}([\alpha_{n-1}])$$

dove, se $\text{Imm } \alpha_i \subseteq A$, allora $[\alpha_i] \in \pi_1(A, x_0)$ e $\varphi_i = \varphi_A$, mentre, se $\text{Imm } \alpha_i \subseteq B$, allora $[\alpha_i] \in \pi_1(B, x_0)$ e $\varphi_i = \varphi_B$. Questo, perché $\varphi_i\left(\begin{smallmatrix} [\alpha_i] \\ \in \pi_1(A \circ B, x_0) \end{smallmatrix}\right) = \varphi \circ (i_A \circ i_B)_*([\alpha_i]) = \varphi\left(\begin{smallmatrix} [\alpha_i] \\ \in \pi_1(X, x_0) \end{smallmatrix}\right)$, per cui

$$\varphi([\alpha]) = \varphi\left(\prod_{i=0}^{n-1} [\alpha_i]\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi([\alpha_i]) = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i([\alpha_i])$$

Ciò dimostra anche l'unicità di φ .

Dobbiamo affrontare il problema della buona definizione di φ (e poi la commutatività del diagramma). In particolare, dato α come sopra, dobbiamo vedere che:

1. φ è un omomorfismo di gruppi;
2. se $\text{Imm } \alpha_i \subseteq A \cap B$, allora è indifferente che si usi $\varphi_A([\alpha_i])$ o $\varphi_B([\alpha_i])$;
3. cambiando la suddivisione di α con una qualsiasi suddivisione i cui sotto-archi giacciono ciascuno tutto in A o tutto in B , il risultato non cambia;
4. se $\beta \sim \alpha$, allora la costruzione produce lo stesso risultato sia per β che per α .

1. Infatti, data una suddivisione di $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_0)$ tale che ogni sotto-arco della suddivisione sia contenuto in A o in B , otteniamo un'analogha suddivisione di $\alpha * \beta$ semplicemente giustapponendo le due suddivisioni di partenza. Per come è definito φ , è allora chiaro che

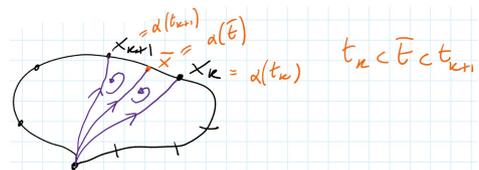
$$\varphi([\alpha * \beta]) = \varphi([\alpha]) \cdot \varphi([\beta])$$

2. È una conseguenza immediata dell'ipotesi che $\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_*$, per cui se $\text{Imm } \alpha_i \subseteq A \cap B$,

$$\varphi_A\left(\begin{smallmatrix} [\alpha_i] \\ \in \pi_1(A, x_0) \end{smallmatrix}\right) = \varphi_A\left((j_A)_*\left(\begin{smallmatrix} [\alpha_i] \\ \in \pi_1(A \cap B, x_0) \end{smallmatrix}\right)\right) = \varphi_B\left((j_B)_*\left(\begin{smallmatrix} [\alpha_i] \\ \in \pi_1(A \cap B, x_0) \end{smallmatrix}\right)\right) = \varphi_B\left(\begin{smallmatrix} [\alpha_i] \\ \in \pi_1(B, x_0) \end{smallmatrix}\right)$$

3. Poiché due diverse suddivisioni di $[0, 1]$ ammettono un raffinamento comune e un raffinamento si ottiene aggiungendo un punto alla volta, basta vedere che aggiungendo un \bar{x} tra x_k e x_{k+1} il risultato non cambia. Supponiamo ad esempio $\text{Imm } \alpha|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} \subseteq A^a$.

Siano $\beta_1 = \gamma_{x_k} * \alpha|_{[t_k, \bar{t}]} * \gamma_{\bar{x}}^{-1}$ e $\beta_2 = \gamma_{\bar{x}} * \alpha|_{[\bar{t}, t_{k+1}]} * \gamma_{x_{k+1}}^{-1}$, perciò, come sopra, $\beta_1 * \beta_2 \sim \alpha_k = \gamma_{x_k} * \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]} * \gamma_{x_{k+1}}^{-1}$.



^aSe fosse B , sarebbe identico.

Poiché β_1, β_2 e α_k sono supportati in A e φ_A è un omomorfismo, ne segue che ²⁹

$$\varphi_A([\alpha_k]) = \varphi_A([\beta_1] \cdot [\beta_2]) = \varphi_A([\beta_1]) \varphi_A([\beta_2])$$

D'altronde, usando le due suddivisioni (senza e con \bar{t}), per definizione di φ , otteniamo

$$\varphi([\alpha]) = \varphi_0([\alpha_0]) \circ \varphi_1([\alpha_1]) \circ \cdots \circ \varphi_A([\alpha_k]) \circ \cdots \circ \varphi_{n-1}([\alpha_{n-1}])$$

$$\implies \varphi([\alpha]) = \varphi_0([\alpha_0]) \circ \varphi_1([\alpha_1]) \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}([\alpha_{k-1}]) \circ \varphi_A([\beta_1]) \circ \varphi_A([\beta_2]) \circ \cdots$$

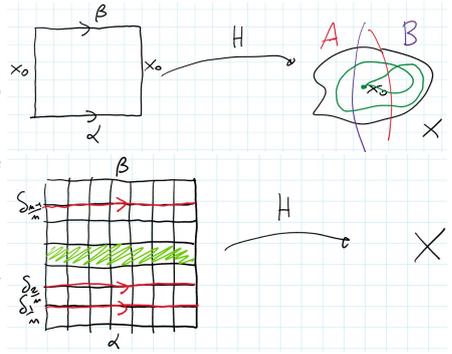
²⁹Tutte le classi della formula che segue sono in $\pi_1(A, x_0)$.

4. Sia $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ un'omotopia di cammini tra α e β . Per compattezza di $[0, 1] \times [0, 1]$ e per l'esistenza del numero di Lebesgue, $\exists n \geq 1$ tale che $H\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right]\right)$ sia contenuto in A o in $B \forall k, h = 0, \dots, n-1$.

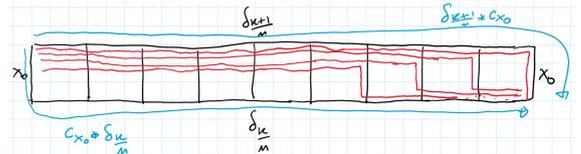
Poniamo $\delta_{\frac{k}{n}} = H_{\frac{k}{n}} : [0, 1] \rightarrow X$, cosicché $\delta_0 = \alpha$, $\delta_1 = \beta$ e, poiché H è a estremi fissi, $\delta_{\frac{k}{n}}$ è un loop basato in $x_0 \forall k = 0, \dots, \frac{n-1}{n}$.

Basta vedere che $\varphi\left(\left[\delta_{\frac{k}{n}}\right]\right) = \varphi\left(\left[\delta_{\frac{k+1}{n}}\right]\right) \forall k = 0, \dots, n-1$, così

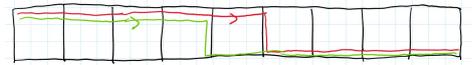
$$\varphi([\alpha]) = \varphi([\delta_0]) = \varphi([\delta_1]) = \varphi([\beta])$$



Esaminiamo perciò un singolo "rettangolo orizzontale":



Possiamo passare da $c_{x_0} * \delta_{\frac{k}{n}}$ a $\delta_{\frac{k+1}{n}} * c_{x_0}$ con n passaggi del tipo



Se dimostrassimo che per ciascuno di questi passaggi elementari il valore di φ non cambia, otterremmo

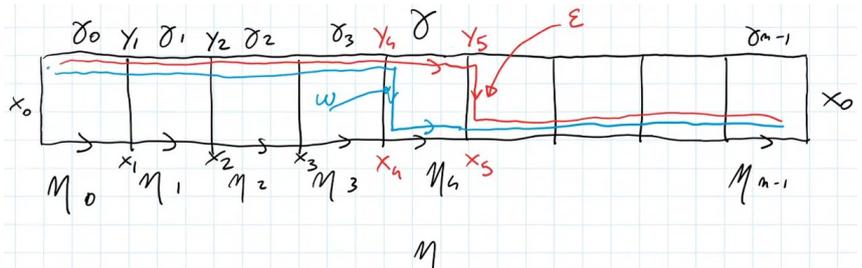
$$\varphi\left(c_{x_0} * \delta_{\frac{k}{n}}\right) = \varphi\left(\delta_{\frac{k+1}{n}} * c_{x_0}\right)$$

ma, per com'è definito φ , avremmo

$$\varphi\left(c_{x_0} * \delta_{\frac{k}{n}}\right) = \varphi\left(\delta_{\frac{k}{n}}\right) \text{ e } \varphi\left(\delta_{\frac{k+1}{n}} * c_{x_0}\right) = \varphi\left(\delta_{\frac{k+1}{n}}\right)$$

per cui avremmo finito.

Analizziamo il passo elementare, rinominando $\delta_{\frac{k}{n}} = \eta$ e $\delta_{\frac{k+1}{n}} = \gamma$:



Per com'è definito φ , dobbiamo confrontare³⁰, posti $\tilde{\gamma}_i = \gamma_{y_i} * \gamma_i * \gamma_{y_{i+1}}^{-1}$ e $\tilde{\eta}_i = \eta_{x_i} * \eta_i * \eta_{x_{i+1}}^{-1}$, dove γ_x connette x_0 a $x \forall x \in X$,

$$\varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_0) \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_{k-1}) \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_k) \cdot \varphi_{A,B}(\gamma_{y_5} * \varepsilon * \gamma_{x_5}^{-1}) \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\eta}_{k+1}) \cdot \dots$$

con

$$\varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_0) \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_{k-1}) \cdot \varphi_{A,B}(\gamma_{y_4} * \omega * \gamma_{x_4}^{-1}) \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\eta}_k) \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\eta}_{k+1}) \cdot \dots$$

Dunque basta vedere che (abbiamo scelto 5 ma ovviamente vale per qualsiasi scelta)

$$\varphi_{A,B}(\tilde{\gamma}_k) \cdot \varphi_{A,B}(\gamma_{y_5} * \varepsilon * \gamma_{x_5}^{-1}) = \varphi_{A,B}(\gamma_{y_4} * \omega * \gamma_{x_4}^{-1}) \cdot \varphi_{A,B}(\tilde{\eta}_k)$$

$$\begin{array}{ccc} y_4 & \xrightarrow{\gamma_4} & y_5 \\ \omega \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ x_4 & \xrightarrow{\eta_4} & x_5 \end{array}$$

Notiamo però che tutto questo quadratino è portato da H in A o in B , supponiamo, senza perdita di generalità, in A . In particolare, $\gamma_k * \varepsilon$ e $\omega * \eta_k$ siano cammini in A e così lo sono anche $\tilde{\gamma}_k$, $\gamma_{y_5} * \varepsilon * \gamma_{x_5}^{-1}$, $\gamma_{y_4} * \omega * \gamma_{x_4}^{-1}$ e $\tilde{\eta}_k$. Inoltre, proprio perché H è definita su tutto il quadrato a valori in A , i cammini

³⁰Con $\varphi_{A,B} = \varphi_A \circ \varphi_B$.

$\tilde{\gamma}_k * (\gamma_{y_5} * \varepsilon * \gamma_{x_5}^{-1})$ e $(\gamma_{y_4} * \omega * \gamma_{x_4}^{-1}) * \tilde{\eta}_k$ sono omotopi a estremi fissi in A (per il **Fatto 3.6.4**), per cui $\varphi_A([\tilde{\gamma}_k] \cdot [\gamma_{y_5} * \varepsilon * \gamma_{x_5}^{-1}]) = \varphi_A([\gamma_{y_4} * \omega * \gamma_{x_4}^{-1}] \cdot [\tilde{\eta}_k])$, da cui, essendo φ_A un omomorfismo,

$$\varphi_A([\tilde{\gamma}_k]) \cdot \varphi_A([\gamma_{y_5} * \varepsilon * \gamma_{x_5}^{-1}]) = \varphi_A([\gamma_{y_4} * \omega * \gamma_{x_4}^{-1}]) \cdot \varphi_A([\tilde{\eta}_k])$$

come voluto.

Manca da dimostrare la commutatività del diagramma: è chiaro, per costruzione, che $\varphi \circ (i_A)_* = \varphi_A$ e $\varphi \circ (i_B)_* = \varphi_B$: se $[\alpha] \in \pi_1(A, x_0)$, allora α è un laccio tutto contenuto in A , per cui, per calcolare $\varphi((i_A)_*([\alpha]))$, possiamo prendere la suddivisione banale, ottenendo così $\varphi((i_A)_*([\alpha])) = \varphi_A([\alpha])$. Stessa cosa con B al posto di A . \square

Corollario 3.14.2. S^n è semplicemente connesso $\forall n \geq 2$.

Dimostrazione. Posti $A = S^n \setminus \{N\}$ e $B = S^n \setminus \{S\}$, dove N, S sono il Polo Nord e il Polo Sud, abbiamo $A \cong B \cong \mathbb{R}^n$, sono semplicemente connessi e $A \cap B \cong S^n \setminus \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ è connesso per archi, per cui $\pi_1(S^n, x_0)$ è generato dalle immagini di $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$, che sono banali, dunque $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$. \square

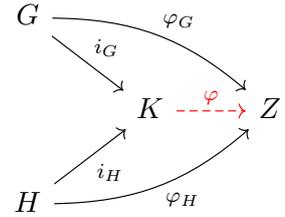
Domanda: cosa non funziona nella dimostrazione precedente, se $n = 1$?

La dimostrazione precedente mostra in realtà che, se $X = A \cup B$ e A, B sono aperti semplicemente connessi e $A \cap B$ è connesso per archi, allora X è semplicemente connesso.

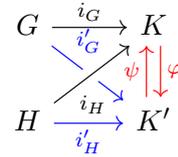
Domanda: nelle ipotesi del **Teorema di Van Kampen**, come utilizzare il teorema per calcolare $\pi_1(X)$ a partire da $\pi_1(A)$, $\pi_1(B)$ e $\pi_1(A \cap B)$?

3.15 Prodotto libero

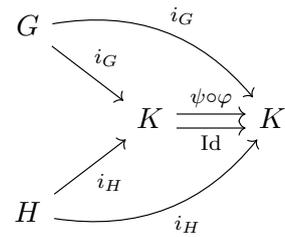
Definizione 3.15.1. Dati due gruppi G, H , il **prodotto libero** di G e H , denotato con $G * H$, è il gruppo K che gode della seguente proprietà universale: $\exists i_G : G \rightarrow K$ e $i_H : H \rightarrow K$ omomorfismi tali che $\forall \varphi_G : G \rightarrow Z$ e $\varphi_H : H \rightarrow Z$ coppia di omomorfismi $\exists ! \varphi : K \rightarrow Z$ tale che $\varphi \circ i_G = \varphi_G$ e $\varphi \circ i_H = \varphi_H$.



L'unicità di tale prodotto libero (a meno di isomorfismo) segue dalla proprietà universale: sia K' un altro prodotto libero (con $i'_G : G \rightarrow K'$, $i'_H : H \rightarrow K'$).



Poiché K è un prodotto libero, utilizzando la proprietà universale con $Z = K'$, $\varphi_G = i'_G$ e $\varphi_H = i'_H$, otteniamo $\varphi : K \rightarrow K'$ tale che $\varphi \circ i_G = i'_G$ e $\varphi \circ i_H = i'_H$. Analogamente, poiché K' è un prodotto libero, $\exists \psi : K' \rightarrow K$ tale che $\psi \circ i'_G = i_G$ e $\psi \circ i'_H = i_H$.



Ora, $\psi \circ \varphi : K \rightarrow K$ verifica

$$(\psi \circ \varphi) \circ i_G = \psi \circ (\varphi \circ i_G) = \psi \circ i'_G = i_G \quad \text{e} \quad (\psi \circ \varphi) \circ i_H = \dots = i_H$$

Per unicità della proprietà universale, poiché K è un prodotto libero, segue che $\psi \circ \varphi = \text{Id}_K$. Analogamente, $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{K'}$, per cui φ e ψ sono isomorfismi, da cui l'unicità del prodotto libero. Per dimostrare l'esistenza del prodotto libero, ne dobbiamo esibire un modello esplicito. Dati G, H , poniamo

$$\mathcal{P} = \{\text{liste finite ordinate di elementi di } G \cup H \text{ (compresa la lista vuota)}\}$$

Un elemento di \mathcal{P} è della forma $(x_1 x_2 \dots x_k)$, con $x_i \in G$ o $x_i \in H \forall i = 1, \dots, k$, oppure è il \emptyset . Su \mathcal{P} c'è un prodotto dato dalla giustapposizione

$$(x_1 \dots x_k) \cdot (y_1 \dots y_h) = (x_1 \dots x_k y_1 \dots y_h)$$

$$\emptyset \cdot (x_1 \dots x_k) = (x_1 \dots x_k) \cdot \emptyset = (x_1 \dots x_k) \quad \text{e} \quad \emptyset \cdot \emptyset = \emptyset$$

Questo prodotto è associativo e ha \emptyset come elemento neutro. Introduciamo su \mathcal{P} la relazione di equivalenza generata da

$$(x_1 \dots x_k x_{k+1} \dots x_n) \sim (x_1 \dots x_{k-1} x_k \cdot x_{k+1} x_{k+2} \dots x_n)$$

se x_k e x_{k+1} appartengono entrambi a G o ad H e \cdot è il prodotto in G o in H .

$$1_G \sim \emptyset \quad \text{e} \quad 1_H \sim \emptyset \quad {}^{31}$$

Dunque $p \sim p'$, con $p, p' \in \mathcal{P} \iff \exists p_1, \dots, p_n$ tali che $p = p_1 \sim p_2 \sim \dots \sim p_n = p'$ ³².

È facile vedere che il prodotto su \mathcal{P} passa al quoziente su \mathcal{P}/\sim , definendo su quest'ultimo una struttura di gruppo con elemento neutro $[\emptyset] = [1_G] = [1_H]$.

Se indichiamo con g_i gli elementi di G e con h_i gli elementi di H , allora l'inverso di $g_1 h_1 g_2 h_2 g_3$ sarà ad esempio $g_3^{-1} h_2^{-1} g_2^{-1} h_1^{-1} g_1^{-1}$ in quanto

$$\begin{aligned} (g_1 h_1 g_2 h_2 g_3) \cdot (g_3^{-1} h_2^{-1} g_2^{-1} h_1^{-1} g_1^{-1}) &= g_1 h_1 g_2 h_2 g_3 g_3^{-1} h_2^{-1} g_2^{-1} h_1^{-1} g_1^{-1} \sim \\ &\sim g_1 h_1 g_2 h_2 1_G h_2^{-1} g_2^{-1} h_1^{-1} g_1^{-1} \sim g_1 h_1 g_2 h_2 h_2^{-1} g_2^{-1} h_1^{-1} g_1^{-1} \sim \dots \sim \emptyset \end{aligned}$$

Ogni elemento di $K = \mathcal{P}/\sim$ ammette un'unica **forma ridotta**, cioè un rappresentante dato da una lista o vuota (quando l'elemento è l'identità di K) o tale che due termini consecutivi non appartengono

³¹Con 1_G e 1_H indichiamo la lista data dalla sola identità rispettivamente di G e H .

³²Equivalenze descritte qui sopra.

mai entrambi a G o entrambi ad H e nessun termine è 1_G o 1_H .
 Ad esempio, se i g_i appartengono a G e gli h_j ad H , allora

$$\underline{g_1 g_2} h_1 g_3 h_2 g_4 \underline{h_3 h_4}$$

non è ridotta. La forma ridotta corrispondente a questa lista è

$$\bar{g} h_1 g_3 h_2 g_4 \bar{h}$$

dove $\bar{g} = g_1 \cdot g_2 \in G$ e $\bar{h} = h_3 \cdot h_4 \in H$.

D'ora in poi, confonderemo le classi in $K = \mathcal{P}/\sim$ con i loro rappresentanti in forma ridotta, cioè scriveremo $ghg'h'$ per indicare $[ghg'h']$.

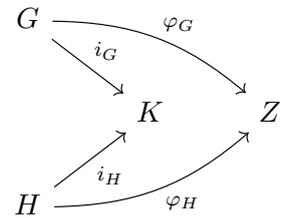
Verifichiamo che il gruppo K appena definito sia davvero il prodotto libero di G e H , cioè verifica la proprietà universale richiesta:

innanzitutto abbiamo gli omomorfismi $i_G : G \rightarrow K$ e $i_H : H \rightarrow K$
 $g \mapsto [g]$ e $h \mapsto [h]$.

Sono omomorfismi proprio perché $[g g']^a = [g \cdot g']^b \forall g, g' \in G$, per cui

$$i_G(g \cdot g') =^c [g \cdot g'] =^d [g g'] =^e [g] \cdot [g']$$

Stessa cosa per i_H .



^aIntesa come lista con 2 elementi.

^bLista di un solo elemento dato dal prodotto di g e g' in G .

^cPer definizione di i_G .

^dPer definizione di \sim .

^ePer definizione di prodotto in K .

Ora, dati omomorfismi φ_G e φ_H come nel diagramma a fianco, definiamo

$$\varphi : K \rightarrow Z$$

$$g_1 h_1 \dots g_n h_n \mapsto \varphi_G(g_1) \cdot \varphi_H(h_1) \cdot \dots \cdot \varphi_G(g_n) \cdot \varphi_H(h_n)$$

e analogamente la formula per forme ridotte che iniziano con un elemento di H e/o finiscono con un elemento di G .

Il fatto che sia un omomorfismo è ovvio quando lo controlliamo sui prodotti di forme ridotte senza cancellazioni e discende dal fatto che φ_G e φ_H sono omomorfismi quando ci sono cancellazioni. Ad esempio

$$\begin{aligned} \varphi((g_1 h_1 g_2) \cdot (h_2 g_3)) &= \varphi(g_1 h_1 g_2 h_2 g_3) = \varphi_G(g_1) \cdot \varphi_H(h_1) \cdot \varphi_G(g_2) \cdot \varphi_H(h_2) \cdot \varphi_G(g_3) = \\ &= (\varphi_G(g_1) \cdot \varphi_H(h_1) \cdot \varphi_G(g_2)) \cdot (\varphi_H(h_2) \cdot \varphi_G(g_3)) = \varphi(g_1 h_1 g_2) \cdot \varphi(h_2 g_3) \\ \varphi((g_1 h_1) \cdot (h_2 g_2)) &= \varphi(g_1 h_1 \cdot h_2 g_2) = \varphi_G(g_1) \cdot \varphi_H(h_1 \cdot h_2) \cdot \varphi_G(g_2) = \\ &= \varphi_G(g_1) \cdot \varphi_H(h_1) \cdot \varphi_H(h_2) \cdot \varphi_G(g_2) = \varphi(g_1 h_1) \cdot \varphi(h_2 g_2) \end{aligned}$$

Per costruzione si ha $\varphi \circ i_G = \varphi_G$ e $\varphi \circ i_H = \varphi_H$.

Osservazione 82. Se $G = \{1\}$, allora $G * H \cong H$.

Osservazione 83. Se $G \neq \{1\}$ e $H \neq \{1\}$, allora $G * H$ non è abeliano.

Infatti, se $g \in G \setminus \{1\}$ e $h \in H \setminus \{1\}$, allora $gh \neq hg$ ³³ in $G * H$.

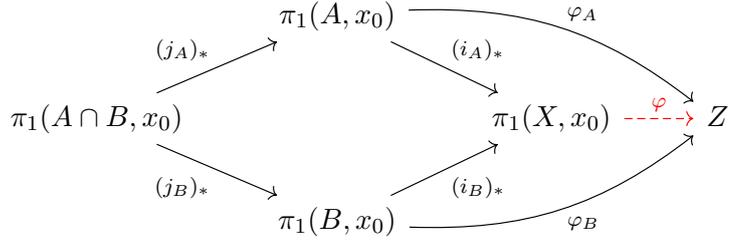
Osservazione 84. $G * H = H * G$.

Osservazione 85. Ci sono ovvi isomorfismi canonici: $(G_1 * G_2) * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3)$, perciò è ben definito $G_1 * G_2 * G_3$.

Teorema 3.15.1. Siano $X = A \cup B$, con A, B aperti tali che A, B e $A \cap B$ siano connessi per archi, e $x_0 \in A \cap B$. Se $A \cap B$ è semplicemente connesso, allora $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$.

³³Sono entrambe forme ridotte e sono diverse.

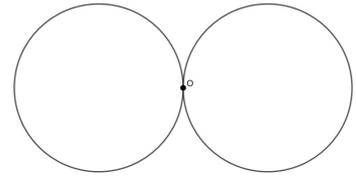
Dimostrazione. Dati $\varphi_A : \pi_1(A, x_0) \rightarrow Z$ e $\varphi_B : \pi_1(B, x_0) \rightarrow Z$ omomorfismi tali che $\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_*$, per il **Teorema di Van Kampen**, $\exists! \varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow Z$ tale che $\varphi \circ (i_A)_* = \varphi_A$ e $\varphi \circ (i_B)_* = \varphi_B$. Ora, se $\pi_1(A \cap B, x_0)$ è banale, la richiesta $\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_*$ è sempre soddisfatta automaticamente (cioè $\forall \varphi_A, \varphi_B$). Dunque, per definizione di prodotto libero, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$.



□

Esempio 71 (Il bouquet di circonferenze).

Sia $X = S^1 \vee S^1$ e prendiamo come punto base proprio il punto x_0 ottenuto dai punti base delle due copie di S^1 che sono identificati. Pensiamo $X \subseteq \mathbb{R}^2$ come in figura:



$X =$ unione delle circonferenze di raggio 1 centrate in $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Poniamo $A = X \cap \{(x, y) \mid x < \frac{1}{100}\}$ e $B = X \cap \{(x, y) \mid x > -\frac{1}{100}\}$. A e B sono aperti (in X):



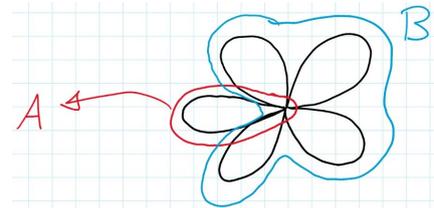
A si retrae per deformazione sulla circonferenza centrata in $(-1, 0)$, mentre B si retrae per deformazione sulla circonferenza centrata in $(1, 0)$, perché entrambi i “baffi” si retraggono per deformazione sull’origine.

Dunque A e B sono omotopicamente equivalenti ad S^1 , pertanto $\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

$A \cap B$ si retrae per deformazione sull’origine ed è perciò contraibile, dunque semplicemente connesso. Perciò $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Più in generale, si dimostra facilmente per induzione che

$$\pi_1(\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ copie}}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ copie}}$$



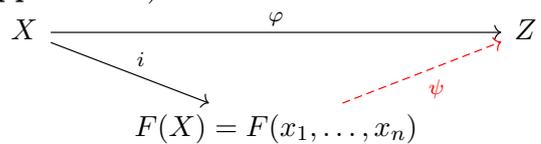
utilizzando il **Teorema di Van Kampen** con gli aperti a fianco:

Corollario 3.15.2. Se $F \subseteq \mathbb{R}^2$ è tale che $|F| = n \in \mathbb{N}$, allora $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus F) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$.

Il prodotto libero di n copie di \mathbb{Z} si chiama anche **gruppo libero su n generatori**, per le ragioni che seguono: se indichiamo con x_i un generatore della copia i -esima di \mathbb{Z} (per cui tale copia è $\{x_i^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$), allora $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ è il gruppo delle parole ridotte negli x_i con opportuni esponenti ³⁴. Si indica con $F(x_1, \dots, x_n)$ ³⁵ e gode della seguente proprietà universale:

Proposizione 3.15.3 (Proprietà universale del gruppo libero).

Dati $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ insieme e $\varphi : X \rightarrow Z$ funzione a valori nel gruppo Z , $\exists! \psi : F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow Z$ omomorfismo tale che $\varphi = \psi \circ i$, dove



Questa proprietà discende direttamente dalla proprietà universale del prodotto libero, dopo aver osservato che assegnare una funzione qualsiasi $\varphi : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow Z$ è come assegnare n omomorfismi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ con $\varphi_i : \{x_i^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \rightarrow Z$, in quanto un tale omomorfismo è univocamente determinato dal suo valore su x_i .

³⁴Un esempio di forma ridotta può essere $x_3^{-1}x_2x_5^{18}x_1x_2x_1^{-1}x_4$.

³⁵ F sta per “Free”.

3.16 Il π_1 degli spazi proiettivi complessi

Teorema 3.16.1. $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{1\} \forall n \geq 0$, cioè i proiettivi complessi sono semplicemente connessi.

Dimostrazione. Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base: $n = 0$, $\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \{*\}$, ok.

In realtà anche $n = 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$, ok.

Passo induttivo: supponiamo ora $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{1\}$ e dimostriamo che $\pi_1(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})) = \{1\}$.

Usiamo il **Teorema di Van Kampen**:

$$A = U_0 = \{[x_0, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \mid x_0 \neq 0\} \quad \text{e} \quad B = \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\}$$

Per costruzione, $A \cup B = \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$; A , in quanto dominio di una carta affine, è omeomorfo a \mathbb{C}^{n+1} , è pertanto semplicemente connesso ed è aperto.

B , essendo complementare di un punto, è aperto e si retrae per deformazione su $H_0 = \{x_0 = 0\}$ (iperpiano all'infinito) tramite la seguente mappa:

$$K : (\mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle \\ ((x_0, \dots, x_{n+1}), t) \longmapsto (tx_0, x_1, \dots, x_{n+1})$$

K è ben definita ³⁶, inoltre $K(v, 1) = v \forall v \in \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle$, $K(v, t) = v \forall v \in \{x_0 = 0\}$ e $K(v, 0) \in \{x_0 = 0\} \forall v \in \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle$, cioè K è una retrazione per deformazione di $\mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle$ su $\{x_0 = 0\}$.

Notiamo che, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ $K(\lambda v, t) = \lambda K(v, t)$, dunque K passa al quoziente definendo

$$\bar{K} : \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\} \longrightarrow H_0$$

retrazione per deformazione. Dunque $B \sim H_0$ ed è pertanto semplicemente connesso per ipotesi induttiva in quanto $H_0 \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ³⁷. Per concludere ci basta verificare che $A \cap B$ sia connesso per archi ³⁸, e infatti

$$A \cap B = U_0 \cap (\mathbb{P}^{n+1} \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\}) = U_0 \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$$

che è ovviamente connesso per archi. □

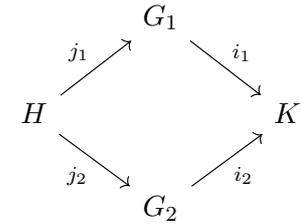
³⁶Se $(x_0, \dots, x_{n+1}) \notin \text{Span}\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle \implies (tx_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \notin \text{Span}\langle(1, 0, \dots, 0)\rangle$ in quanto $x_i \neq 0$ per qualche $i \neq 0$.

³⁷Ogni iperpiano in \mathbb{P}^{n+1} è una copia di \mathbb{P}^n .

³⁸In tal caso possiamo applicare i risultati già visti, per cui A, B semplicemente connessi $\implies X$ semplicemente connesso.

3.17 Prodotto amalgamato

Definizione 3.17.1. Sia dato (a fianco) un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi, diciamo che K è il **prodotto amalgamato** di G_1 e G_2 lungo H (o su H) se la seguente proprietà universale è soddisfatta: $\forall \varphi_1 : G_1 \rightarrow Z$ e $\varphi_2 : G_2 \rightarrow Z$ omomorfismi di gruppi tali che $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$, $\exists! \varphi : K \rightarrow Z$ tale che $\varphi \circ i_1 = \varphi_1$ e $\varphi \circ i_2 = \varphi_2$: (secondo diagramma a fianco).
In tal caso, si scrive $K = G_1 *_H G_2$ ^a.

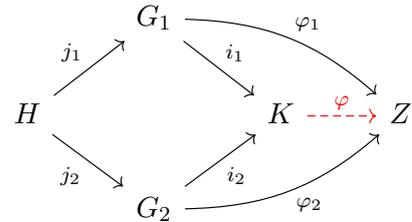


j_1, j_2 e i_1, i_2 non sono necessariamente iniettive.

A causa del **Teorema di Van Kampen**, se A, B e $A \cap B$ sono aperti connessi per archi, allora

$$\pi_1(A \cup B, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0)$$

^aIn realtà dipende anche da j_1 e j_2 .



Osserviamo anche che il prodotto libero è un caso particolare del prodotto amalgamato ³⁹.

Teorema 3.17.1. Il prodotto amalgamato di gruppi esiste ed è unico a meno di isomorfismo.

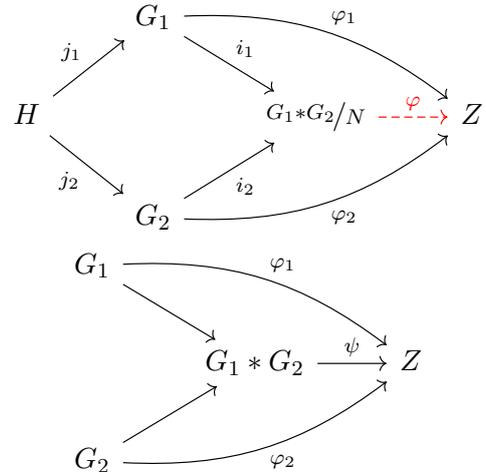
Dimostrazione. L'unicità è identica al caso del prodotto libero.

Per l'esistenza, dati H, G_1, G_2 come sopra, esibiamo un K "che funziona". Poniamo $K = G_1 * G_2 / N$, con $N = \langle\langle S \rangle\rangle$, $S = \{j_1(h) \cdot j_2(h)^{-1} \mid h \in H\}$ ⁴⁰ e $\langle\langle S \rangle\rangle$ è il sottogruppo normale generato da S , cioè il più piccolo sottogruppo normale di $G_1 * G_2$ che contiene S , cioè $\langle\langle S \rangle\rangle = \bigcap_{S \subseteq W \triangleleft G_1 * G_2} W$.

Vediamo che questo K funziona. Data $\pi : G_1 * G_2 \rightarrow K$ la proiezione al quoziente, poniamo $i_1 = \pi \circ f_1 : G_1 \rightarrow K$ e $i_2 = \pi \circ f_2 : G_2 \rightarrow K$, dove $f_i : G_i \hookrightarrow G_1 * G_2$ è l'inclusione. Per la proprietà universale del prodotto libero, $\exists! \psi : G_1 * G_2 \rightarrow Z$ tale che $\psi \circ i_1 = \varphi_1$ e $\psi \circ i_2 = \varphi_2$. Poiché $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$, $\forall h \in H$ abbiamo

$$\psi(j_1(h)) = \varphi_1(j_1(h)) = \varphi_2(j_2(h)) = \psi(j_2(h))$$

$\implies \psi(j_1(h) \cdot j_2(h)^{-1}) = 1 \in Z \implies j_1(h) \cdot j_2(h)^{-1} \in \text{Ker } \psi$,
ovvero $S \subseteq \text{Ker } \psi$.



Poiché $\text{Ker } \psi \triangleleft G_1 * G_2 \implies N \subseteq \text{Ker } \psi$, perciò, per il **Primo teorema di omomorfismo**,

$$\psi : G_1 * G_2 \rightarrow Z \text{ induce } \varphi : G_1 * G_2 / N \rightarrow Z \text{ tale che } \psi = \varphi \circ \pi$$

Per costruzione, φ "risolve il problema universale", in quanto $\varphi \circ i_1(g) = \varphi([g]) = \psi(g) = \varphi_1(g) \forall g \in G_1$ e $\varphi \circ i_2(g) = \varphi([g]) = \psi(g) = \varphi_2(g) \forall g \in G_2$.

Infine, φ è l'unico omomorfismo che fa commutare il diagramma, in quanto $K = G_1 * G_2 / N$, per costruzione, è generato da $i_1(G_1) \cup i_2(G_2)$ ⁴¹ e dunque φ è "forzato" (dal fatto che $\varphi \circ i_1 = \varphi_1$ e $\varphi \circ i_2 = \varphi_2$) su un insieme di generatori, dunque su tutto il gruppo. \square

Osservazione 86. Nella dimostrazione sopra, al posto di $S = \{j_1(h) \cdot j_2(h)^{-1} \mid h \in H\}$, dato T un insieme di generatori di H , avremmo potuto porre $S' = \{j_1(h) \cdot j_2(h)^{-1} \mid h \in T\}$, in quanto

$$\langle\langle S \rangle\rangle = \langle\langle S' \rangle\rangle$$

³⁹È quello con $H = \{1\}$.

⁴⁰Nello scrivere $j_1(h) \cdot j_2(h)^{-1}$ come elemento di $G_1 * G_2$, interpretiamo G_1 e G_2 già come sottogruppi di $G_1 * G_2$.

⁴¹Perché $G_1 * G_2$ è generato da $G_1 \cup G_2$.

3.18 Presentazioni di gruppi

Una presentazione (finita) di un gruppo è un dato di questo tipo: un insieme finito di simboli (“generatori”) $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ e un insieme finito di parole nei simboli, cioè un sottoinsieme finito $R \subseteq F(x_1, \dots, x_n)$ ⁴². Si pone quindi $G = F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle = F(x_1, \dots, x_n)/\langle\langle r_1, \dots, r_k \rangle\rangle$, dove $R = \{r_1, \dots, r_k\}$. G è il gruppo presentato dalla coppia S, R e si scrive spesso $G = \langle S \mid R \rangle$.

$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_2^{-5} x_3 x_1^{-1} x_2 x_3 \rangle$ lo dobbiamo immaginare come il gruppo più grande generato da x_1, x_2, x_3 e nel quale valga $x_1 x_2^{-5} x_3 x_1^{-1} x_2 x_3 = 1$ ⁴³.

Esempio 72. Se $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ (2 generatori e 1 relazione), allora $G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.

Dimostrazione. $G = F(a, b)/\langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle$ e sia $\pi : F(a, b) \rightarrow G$. Poiché π è surgettiva, G è generato da $\bar{a} = \pi(a)$ e $\bar{b} = \pi(b)$ (in quanto $F(a, b)$ è generato da a e b). $\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = 1$, cioè $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$, dunque \bar{a} e \bar{b} commutano. Visto che G è generato da \bar{a} e \bar{b} , ne segue che G è abeliano. Dal momento che l’unica relazione imposta è proprio il commutatore tra \bar{a} e \bar{b} , ci aspettiamo che G sia il **gruppo libero abeliano** su due generatori, cioè $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: vediamo formalmente.

In generale, una presentazione di G ci consente di costruire omomorfismi da G in altri gruppi:

Proposizione 3.18.1. Siano $G = \langle S \mid R \rangle$ e un gruppo Z . Una funzione $f : S \rightarrow Z$ “induce” un omomorfismo $\tilde{f} : G \rightarrow Z \iff$ l’estensione di f a $F(S)$ manda ogni $r_i \in R$ nell’identità di Z . In tal caso, \tilde{f} è unico.

Dimostrazione. Per la **Proposizione 3.15.3**, data $f : S \rightarrow Z$, $\exists! g : F(S) \rightarrow Z$ omomorfismo tale che $f(x_i) = g(x_i) \forall x_i \in S$ (al solito, pensiamo S anche come sottoinsieme di $F(S)$).

Se $g(r_i) = 1 \forall r_i \in R$, allora $R \subseteq \text{Ker } g$, per cui $\langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \text{Ker } g$, dunque g passa al quoziente definendo $\tilde{f} : F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle = G \rightarrow Z$ che, per costruzione, soddisfa $\tilde{f}([x_i]) = f(x_i) \forall x_i \in S$.

L’unicità di tale \tilde{f} è ovvia perché le classi degli $x_i \in S$ in G generano G e dunque, poiché \tilde{f} è fissato sugli x_i , è fissato su tutto G .

Il viceversa (cioè che, se f si estende ad un omomorfismo di G , allora $g(r_i) = 1 \forall r_i \in R$) è ovvio. \square

Tornando all’**Esempio 72**, costruiamo

$$\begin{array}{lcl} f : G & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ a & \longmapsto & (1, 0) \\ b & \longmapsto & (0, 1) \end{array} . \text{ Un tale omomorfismo esiste perché}$$

$$f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1} = 44 \ 0 \in \mathbb{Z}^2$$

cioè l’unica relazione è mandata dalle prescrizioni nell’identità del codominio.

Dunque, visto che $f(a)$ e $f(b)$ generano \mathbb{Z}^2 , abbiamo che $f : G \rightarrow \mathbb{Z}^2$ è surgettiva.

Per vedere che è anche iniettiva, ci sono varie possibilità: poiché già sappiamo che G è abeliano ed è generato da 2 elementi, la tesi potrebbe seguire facilmente dal **Teorema di classificazione dei**

gruppi abeliani finitamente generati, altrimenti poniamo

$$k : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow G \\ (m, n) \longmapsto \bar{a}^m \cdot \bar{b}^n , \text{ osserviamo}$$

che, proprio perché G è abeliano, k è un omomorfismo e che $k \circ f = \text{Id}_G$, il che è ancora vero perché G è abeliano, dunque in G vale

$$\bar{a}^{m_1} \cdot \bar{b}^{n_1} \dots \bar{a}^{m_k} \cdot \bar{b}^{n_k} = \bar{a}^{\sum_{i=1}^k m_i} \cdot \bar{b}^{\sum_{i=1}^k n_i}$$

(cioè ogni elemento di G si scrive nella forma $\bar{a}^m \cdot \bar{b}^n$ per qualche $m, n \in \mathbb{Z}$). \square

⁴²Gruppo libero sui generatori x_1, \dots, x_n .

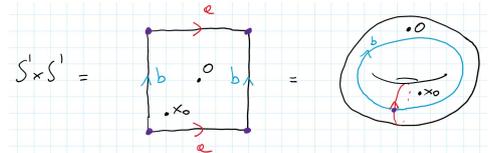
⁴³“Più grande” nel senso che non valgono altre relazioni, se non quella data e tutte le sue conseguenze.

⁴⁴Ovvio perché \mathbb{Z}^2 è abeliano.

3.19 Gruppo fondamentale del toro

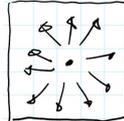
Per calcolare il π_1 del toro, una prima possibilità è mostrare che $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ ⁴⁵ e dedurne che $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +) = (\mathbb{Z}^2, +)$.

Vediamo un metodo alternativo che si estende ad altre superfici: sia $\pi : [0, 1]^2 \rightarrow \text{toro}$ la proiezione al quoziente. Poniamo $A' = (0, 1) \times (0, 1) \subseteq [0, 1]^2$ e $A = \pi(A')$, $B' = [0, 1]^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ e $B = \pi(B') = \text{toro} \setminus \{\pi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.



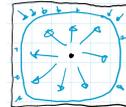
$\pi|_{A'} : A' \rightarrow A$ è un omeomorfismo, per cui $A \cong A' \cong (0, 1)^2$ è semplicemente connesso, cioè $\pi_1(A, x_0) = \{1\}$.

B' si retrae per deformazione radiale su $\partial([0, 1]^2)$:

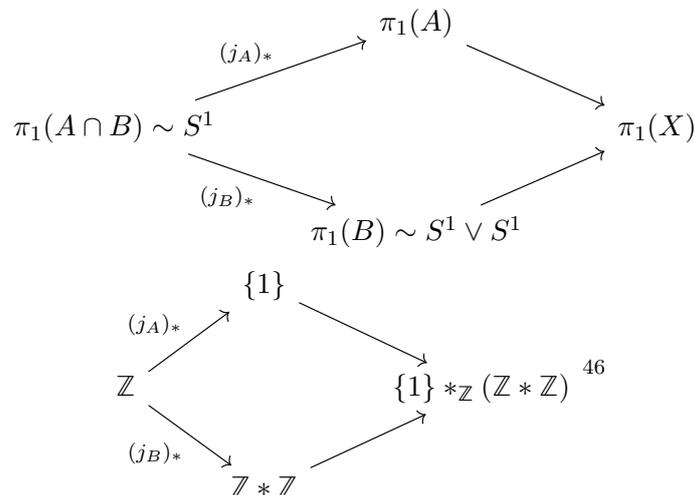


Questa retrazione per deformazione passa al quoziente sul toro definendo una retrazione per deformazione di B su $\pi(\partial[0, 1]^2) = S^1 \vee S^1$.

$A \cap B$ è omeomorfo, tramite π , a $A' \cap B' = (0, 1)^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, che è omotopicamente equivalente a S^1 :



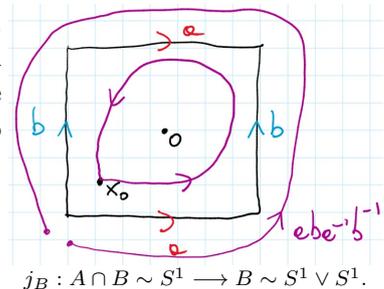
Poiché A, B e $A \cap B$ sono aperti connessi per archi, possiamo usare il **Teorema di Van Kampen**. Il diagramma che ci interessa è



Perciò, $\pi_1(\text{toro}, x_0) = \{1\} * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) / N$, con

$$N = \langle\langle \{(j_A)_*(n) \cdot (j_B)_*(n)^{-1} \mid n \in \mathbb{Z}\} \rangle\rangle = \langle\langle \{(j_A)_*(1) \cdot (j_B)_*(1)^{-1}\} \rangle\rangle \quad ^{47}$$

$(j_A)_*$ non può che essere l'omomorfismo banale, perché $\pi_1(A)$ è banale, dunque $(j_A)_*(1) = 1$ ^a. Dobbiamo studiare $(j_B)_*$: Il laccio viola è un rappresentante del generatore $1 \in \pi_1(A \cap B, x_0)$. In B , il laccio viola è omotopo ad $a * b * a^{-1} * b^{-1}$: $\pi_1(B) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1)$ è il gruppo libero generato da a e b . Perciò



$$\begin{aligned}
 \pi_1(\text{toro}) &= \{1\} * F(a, b) / \langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle = F(a, b) / \langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle = \\
 &= \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2
 \end{aligned}$$

^aQui invece 1 è considerato come elemento neutro.

Questo perché $(j_A)_*(1) \cdot (j_B)_*(1)^{-1} = 1 \cdot (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1}$, che genera lo stesso sottogruppo normale generato da $aba^{-1}b^{-1}$.

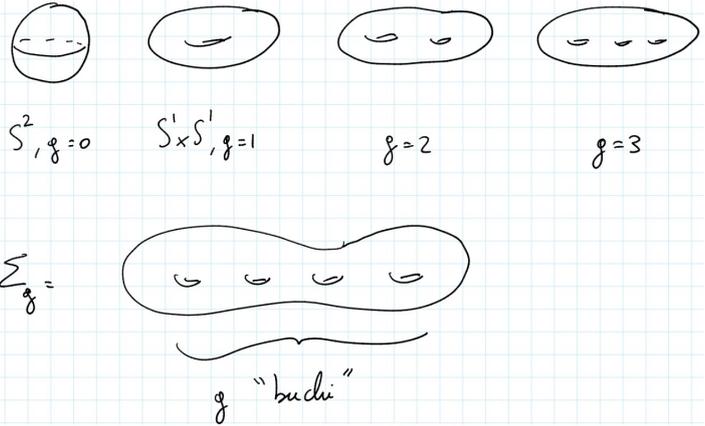
⁴⁵Vedasi **Esercizi VII settimana, Esercizio 78**.

⁴⁶Notazione abusiva: il risultato dipende anche da $(j_A)_*$ e $(j_B)_*$.

⁴⁷Qui 1 va inteso come generatore di \mathbb{Z} .

3.20 Caso delle superfici di genere $g \geq 2$

Una superficie ^a compatta e orientabile ^b è necessariamente omeomorfa a una di quelle a fianco:



Quanto visto finora ci basta per dire che $S^2 \not\cong S^1 \times S^1$: non sono neanche omotopicamente equivalenti, in quanto $\pi_1(S^2) = \{1\}$, mentre $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^2$.

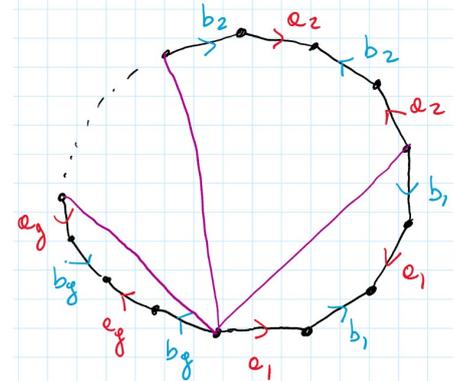
Fissiamo $g \geq 2$ e cerchiamo una presentazione di $\pi_1(\Sigma_g) =: \Gamma_g$.

^aCioè varietà topologica di dimensione 2

^bDefinizioni di corsi superiori a questo.

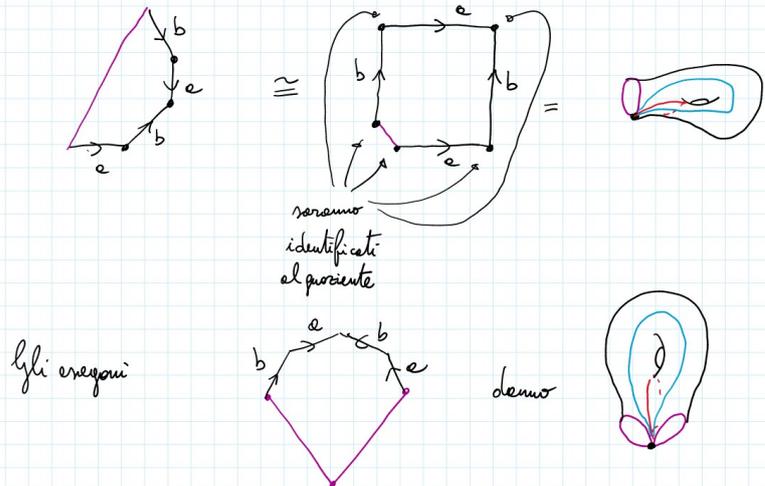
Descriviamo Σ_g come quoziente di un $4g$ -gono (come in figura):

Tirando le diagonali viola, dividiamo il $4g$ -gono in g poligoni: il primo e l'ultimo sono pentagoni, gli altri esagoni. Si vede facilmente che al quoziente tutti i vertici sono identificati ^a.

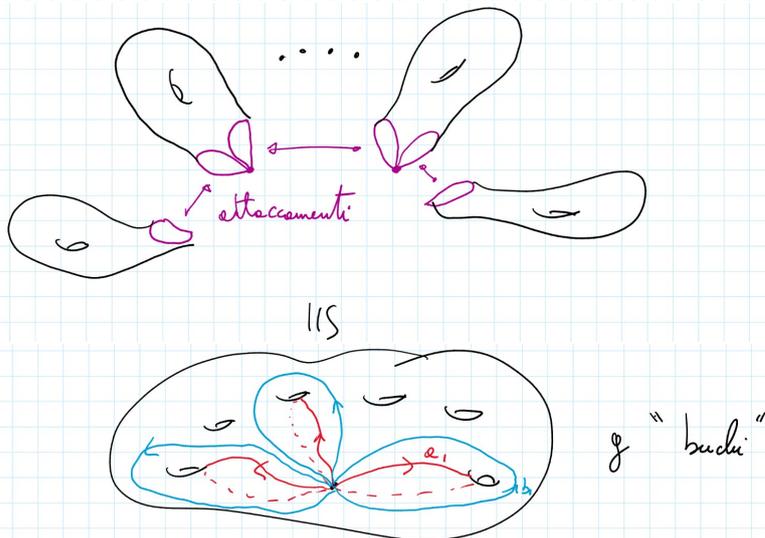


^aVerificarlo per **Esercizio**.

Al quoziente, il primo pentagono dà



Riattaccando tutto insieme si ottiene



Usiamo esattamente gli aperti analoghi al caso del toro, cioè, detto P il $4g$ -agone, $A = \pi(P \setminus \partial P)$ semplicemente connesso, $B = \pi(P \setminus \{\text{punto interno}\}) \sim \pi(\partial P) = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g}$ e $A \cap B \sim P \setminus \partial P \sim S^1$.

Perciò

$$\Gamma_g = \pi_1(\Sigma_g) = \{1\} *_Z F(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g) = F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) / \ll a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \gg^{48}$$

Dunque $\pi_1(\Sigma_g) = \Gamma_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] \rangle$, dove $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Dimostriamo ora che $\Gamma_g \cong \Gamma_{g'} \iff g = g'$. A tale scopo, definiamo il **rango** $\text{rank}(G)$ di un gruppo G come il minimo numero di generatori di G . Ad esempio $\text{rank}(\mathbb{Z}^n) = n$, perché \mathbb{Z}^n è chiaramente generato da n elementi e non può essere generato da $m < n$ elementi, in quanto, detti v_1, \dots, v_m tali elementi, avremmo $\text{Span}_{\mathbb{R}}\langle v_1, \dots, v_m \rangle \supseteq \text{Span}_{\mathbb{Z}}\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \mathbb{Z}^n$, ma, essendo $\text{Span}_{\mathbb{R}}\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^m e poiché un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n che contiene \mathbb{Z}^n è tutto \mathbb{R}^n , avremmo che \mathbb{R}^n sarebbe generato come spazio vettoriale da m vettori $\frac{1}{2}$ se $m < n$.

Proposizione 3.20.1. $\text{rank}(\Gamma_g) = 2g$.

Dimostrazione. La presentazione di Γ_g data sopra ha $2g$ generatori e dunque $\text{rank}(\Gamma_g) \leq 2g$. Osserviamo che, poiché $\Gamma_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] \rangle$, la mappa

$$\begin{aligned} \psi : \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\} &\longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \\ a_i &\longmapsto e_i \\ b_i &\longmapsto e_{g+i} \end{aligned}$$

dove e_1, \dots, e_{2g} è la base canonica di \mathbb{Z}^{2g} , verifica $\psi(a_1)\psi(b_1)\psi(a_1)^{-1}\psi(b_1)^{-1} \dots =^{49} 0$, perciò ψ si estende a un omomorfismo $\tilde{\psi} : \Gamma_g \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g}$.

Tale omomorfismo è surgettivo⁵⁰, per cui $\text{rank}(\Gamma_g) \geq \text{rank}(\mathbb{Z}^{2g}) = 2g$ ⁵¹. □

Attenzione! È vero che, se $f : G \longrightarrow H$ è omomorfismo surgettivo, allora $\text{rank}(G) \geq \text{rank}(H)$ (simile alla dimensione di spazi vettoriali). Però, se H è un sottogruppo di G , allora può benissimo accadere che $\text{rank}(H) > \text{rank}(G)$ (diversissimo dalla dimensione di spazi/sottospazi vettoriali).

Teorema 3.20.2. *Sono fatti equivalenti:*

- ① $g = g'$.
- ② Σ_g è omeomorfa a $\Sigma_{g'}$.
- ③ Σ_g è omotopicamente equivalente a $\Sigma_{g'}$.
- ④ $\pi_1(\Sigma_g) \cong \pi_1(\Sigma_{g'})$.

Dimostrazione. (① \implies ② \implies ③ \implies ④) sono ovvie.

(④ \implies ①) Se $\text{rank}(\pi_1(\Sigma_g)) = \text{rank}(\pi_1(\Sigma_{g'}))$, allora $g = g'$. □

⁴⁸Unica parola di lunghezza $4g$.

⁴⁹In quanto \mathbb{Z}^{2g} è abeliano.

⁵⁰La base canonica è nell'immagine.

⁵¹In quanto l'immagine di un qualsiasi insieme di generatori genera l'immagine.

3.21 Rivestimento universale

Definizione 3.21.1. Un rivestimento $p : E \rightarrow X$ si dice **universale**, se E è connesso per archi e semplicemente connesso.

Seguirà da quanto vedremo che un tale rivestimento è unico ⁵².

Esempio 73. $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad e \quad S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \quad \forall n \geq 2.$
 $t \mapsto e^{2\pi it} \quad v \mapsto [v]$

Teorema 3.21.1. Se $p : E \rightarrow X$ rivestimento universale e $x_0 \in X$, allora $|\pi_1(X, x_0)| = |p^{-1}(x_0)|$.

Dimostrazione. Fissiamo $\tilde{x}_0 \in F = p^{-1}(x_0)$ e mostriamo che la mappa $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$
 $[\gamma] \mapsto \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$
 è bigettiva. Poiché E è connesso per archi, l'azione di monodromia è transitiva, per cui ψ è surgettiva. Se $\psi([\gamma]) = \psi([\delta])$, allora $\tilde{x}_0 \cdot [\gamma] = \tilde{x}_0 \cdot [\delta] \implies \tilde{x}_0 \cdot [\gamma] \cdot [\gamma^{-1}] = \tilde{x}_0 \cdot [\delta] \cdot [\gamma^{-1}] \implies \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \cdot [\delta * \gamma^{-1}] \implies [\delta * \gamma^{-1}] \in \text{Stab}(\tilde{x}_0) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = \text{53} \{1\} \implies [\delta * \gamma^{-1}] = 1 \implies [\delta] = [\gamma]$ e ψ è iniettiva. \square

Corollario 3.21.2. $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall n \geq 2.$

Dimostrazione. $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un rivestimento universale, per cui $|\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))| = |\text{fibra}| = 2$ ⁵⁴ e l'unico gruppo con 2 elementi è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

Definizione 3.21.2. Uno spazio X è **semilocalmente semplicemente connesso**, se $\forall x_0 \in X \exists U$ intorno di x_0 tale che, detta $i : U \hookrightarrow X$ l'inclusione, $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è l'omomorfismo banale. In altre parole, ogni laccio in U basato in x_0 è omotopicamente banale in X .

Teorema 3.21.3 (Esistenza del rivestimento universale).

Ogni spazio semilocalmente semplicemente connesso ammette un rivestimento universale.

Ovviamente, localmente semplicemente connesso \implies semilocalmente semplicemente connesso, dunque, ad esempio, le varietà sono semilocalmente semplicemente connesse (e anche il bouquet di varietà: pensateci).

In effetti vale: X ammette un rivestimento universale \iff è semilocalmente semplicemente connesso.

(\implies) ⁵⁵ È facile: dati $p : E \rightarrow X$ universale e $x_0 \in X$, $\exists U$ intorno di x_0 ben rivestito; siano

$V \subseteq p^{-1}(U)$ uno degli aperti tali che $p|_V : V \rightarrow U$ sia omeomorfismo e $g : U \rightarrow V$ l'inversa di $p|_V$. Abbiamo il diagramma commutativo a fianco: $i_* = p_* \circ j_* \circ g_*$, ma $\pi_1(E)$ è banale, dunque $p_* \circ j_* \circ g_*$, fattorizzando attraverso il gruppo banale, è banale.

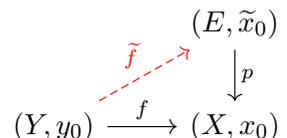
$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{j} & E \\ g \uparrow & & \downarrow p \\ U & \xleftarrow{i} & X \end{array}$$

(\impliedby) ⁵⁶ È più laboriosa: dati X e $x_0 \in X$, si definisce E come l'insieme delle classi di omotopia a estremi fissi dei cammini in X con punto iniziale x_0 e si pone $p([\gamma]) = \gamma(1)$. Dobbiamo topologizzare E ⁵⁷ e tutto torna. Non vediamo i dettagli.

Vogliamo ora studiare gli omomorfismi (ma soprattutto gli automorfismi) di rivestimento. Per farlo, ci serve il seguente fondamentale

Teorema 3.21.4 (Sollevamento per mappe qualsiasi).

Siano $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Se Y è connesso per archi e $f : Y \rightarrow X$ tale che $y_0 \in Y$ e $f(y_0) = x_0$, allora $\exists! \tilde{f} : Y \rightarrow E$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{f} = f \iff f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ ^a.



^aSono entrambi sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.

⁵²A meno di una opportuna nozione di isomorfismo che implica l'omeomorfismo degli spazi totali.

⁵³Poiché E è semplicemente connesso.

⁵⁴Ogni classe in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha 2 preimmagini in S^n .

⁵⁵La meno interessante.

⁵⁶La più interessante.

⁵⁷Se X è metrico, si usa la convergenza uniforme sulle mappe continue da $[0, 1]$ in X .

Dimostrazione. (\implies) $\text{Imm } f_* = \text{Imm}(p \circ \tilde{f})_* = \text{Imm}(p_* \circ \tilde{f}_*) \subseteq \text{Imm } p_*$, che è la tesi.

(\impliedby) Definiamo \tilde{f} così: $\forall y \in Y$, scegliamo arbitrariamente un cammino $\gamma \in \Omega(Y, y_0, y)$.

Sia $\alpha = \widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde{x}_0}$. Poniamo $\tilde{f}(y) = \alpha(1)$.

È chiaro che, se \tilde{f} come nella tesi esiste, $\tilde{f} \circ \gamma$ deve essere un sollevamento di $f \circ \gamma$ da \tilde{x}_0 , per cui $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(\gamma(1))$ deve essere

uguale a $\widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde{x}_0}(1)$ e questa è l'unica definizione possibile; ciò mostra l'unicità.

Per concludere, basta verificare che \tilde{f} sia continua ^a e che \tilde{f} sia ben definita, cioè $\tilde{f}(y)$, come definito sopra, non dipende dalla scelta di γ . È qui che si usa l'ipotesi: sia $\gamma' \in \Omega(Y, y_0, y)$.

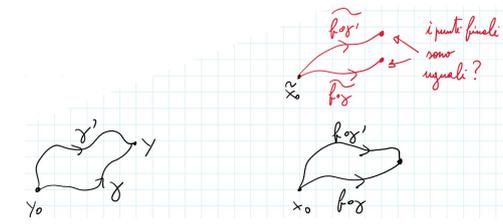
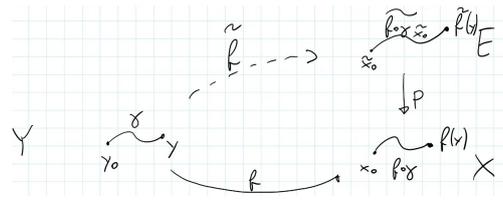
Osserviamo che $\gamma * (\gamma')^{-1} \in \Omega(Y, y_0, y_0)$ e

$$[f \circ \gamma * (f \circ \gamma')^{-1}] = f_*([\gamma * (\gamma')^{-1}]) \subseteq \text{Imm } f_* \subseteq {}^b \text{Imm } p_*$$

^aElementare ma un po' noioso, lo omettiamo.

^bPer ipotesi.

Dunque $[(f \circ \gamma) * (f \circ \gamma')^{-1}] \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = \text{Stab}(\tilde{x}_0)$ ⁵⁸, cioè $(f \circ \gamma) * (f \circ \gamma')^{-1}$ si solleva in E ad un loop basato in \tilde{x}_0 . Questo è equivalente al fatto che $\widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde{x}_0}(1) = \widetilde{f \circ \gamma'}_{\tilde{x}_0}(1)$. \square



⁵⁸Stabilizzatore rispetto all'azione di monodromia.

3.22 Morfismi di rivestimento

D'ora in poi, tutti gli spazi saranno connessi per archi.

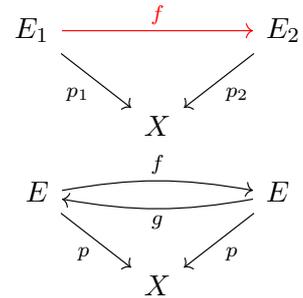
Fissiamo X e due rivestimenti $p_1 : E_1 \rightarrow X$ e $p_2 : E_2 \rightarrow X$.

Definizione 3.22.1. Un **morfismo di rivestimenti** da p_1 a p_2 è una mappa $f : E_1 \rightarrow E_2$ tale che $p_2 \circ f = p_1$.

Saremo particolarmente interessati al caso in cui $p_1 = p_2 = p$ (dunque $E_1 = E_2 = E$) e f ammette un morfismo inverso $g : E \rightarrow E$ tale che $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$ e $p \circ g = p$.

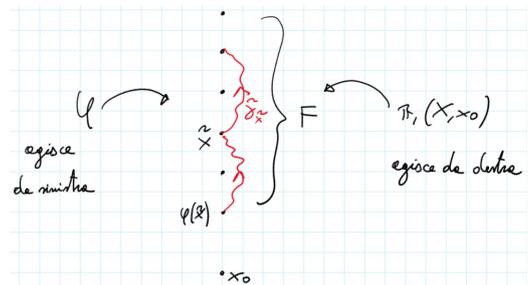
Una tale f e una tale g sono detti **automorfismi** di p . È ovvio che l'identità di E sia sempre un automorfismo e che la composizione di automorfismi sia un automorfismo, per cui l'insieme degli automorfismi è un gruppo che si indica $\text{Aut}(E \xrightarrow{p} X)$, o, più semplicemente, con $\text{Aut}(p)$ o ancora, quando il contesto è chiaro, con $\text{Aut}_X(E)$ o addirittura $\text{Aut}(E)$.

Osserviamo che, se $f \in \text{Aut}(E)$, allora $\forall x_0 \in X$ $f(p^{-1}(x_0)) = p^{-1}(x_0)$, cioè f preserva le fibre ⁵⁹.



Proposizione 3.22.1. L'azione di monodromia e quella degli automorfismi commutano, cioè, detta $F = p^{-1}(x_0)$ e dato $\varphi \in \text{Aut}_X(E)$, $\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ si ha

$$\varphi(\tilde{x} \cdot [\gamma]) = \varphi(\tilde{x}) \cdot [\gamma] \quad \forall \tilde{x} \in F$$



Dimostrazione. Se $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ è un sollevamento di $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_0)$ a partire da \tilde{x} , allora $\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ è un cammino che parte in $\varphi(\tilde{x})$ e solleva γ , in quanto $p \circ \varphi = p$. Per unicità dei sollevamenti, $\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}} = \tilde{\gamma}_{\varphi(\tilde{x})}$. Perciò

$$\varphi(\tilde{x}) \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_{\varphi(\tilde{x})}(1) = \varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1) = \varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)) = \varphi(\tilde{x} \cdot [\gamma])$$

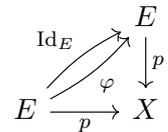
□

Proposizione 3.22.2. $\text{Aut}_X(E)$ agiscono su E in maniera propriamente discontinua (e, in particolare, libera).

Dimostrazione. Siano $\tilde{x} \in E$, $x = p(\tilde{x})$ e U un intorno ben rivestito di X , quindi $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$, con

V_i aperto $\forall i \in I$, e $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ è omeomorfismo. Sia $V = V_{i_0}$ l'aperto che contiene \tilde{x} . Per concludere, basta vedere che, se $\varphi \in \text{Aut}_X(E)$ e $\varphi(V) \cap V \neq \emptyset$, allora $\varphi = \text{Id}_E$. Se

$\varphi(V) \cap V \neq \emptyset$, allora $\exists z \in V$ tale che $\varphi(z) \in V$. Poiché $p \circ \varphi = p$, $p(\varphi(z)) = p(z)$, ma $p|_V$ è iniettiva, per cui $\varphi(z) = z$. Sia φ che Id_E sollevano p e verificano $\varphi(z) = z$ e $\text{Id}_E(z) = z$, dunque, per unicità del sollevamento, $\varphi = \text{Id}_E$, come voluto.



□

Teorema 3.22.3. Sia G un gruppo che agisce su uno spazio Y in maniera propriamente discontinua. Sappiamo che quindi $p : Y \rightarrow Y/G$ è un rivestimento ⁶⁰. Vale inoltre $\text{Aut}(p) = G$.

Dimostrazione. L'inclusione $G \subseteq \text{Aut}(p)$ è ovvia: per definizione, ogni $g \in G$ è una mappa $g : Y \rightarrow Y$ tale che $p \circ g = p$ (e ha inversa g^{-1}).

Inoltre, se $\varphi \in \text{Aut}(p)$, allora $\forall \tilde{x} \in Y$ $\varphi(\tilde{x})$ appartiene alla stessa fibra di \tilde{x} , cioè alla stessa orbita, dunque $\exists g \in G$ tale che $\varphi(\tilde{x}) = g \cdot \tilde{x} \implies g^{-1} \cdot \varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$, cioè $g^{-1} \circ \varphi \in \text{Stab}(\tilde{x})$, ma, poiché gli $\text{Aut}_X(E)$ agiscono in maniera libera ($\implies \text{Stab}(\tilde{x}) = \{\text{Id}_E\}$), $g^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_E \implies \varphi = g$ e dunque $\text{Aut}(p) \subseteq G$. □

⁵⁹È chiaro che $f(p^{-1}(x_0)) \subseteq p^{-1}(x_0)$, infatti $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0) \implies p(\tilde{x}) = x_0 \implies p(f(\tilde{x})) = p(\tilde{x}) = x_0 \implies f(\tilde{x}) \in p^{-1}(x_0)$, e il contenimento è effettivamente un'uguaglianza perché f è bigettiva.

⁶⁰Vedasi **Teorema 3.9.4**.

Domanda: tutti i rivestimenti sono della forma $Y \rightarrow Y/G$ per qualche azione propriamente discontinua? $\text{Aut}_X(E)$ agiscono sempre transitivamente sulla fibra? ⁶¹

Definizione 3.22.2. Un rivestimento $p : E \rightarrow X$ si dice **regolare**, se $\forall F = p^{-1}(x)$ fibra in E l'azione di $\text{Aut}_X(E)$ su F è transitiva.

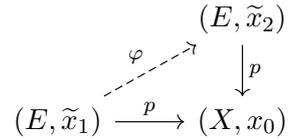
Esempio 74. I rivestimenti del tipo $E \rightarrow E/G$ sono regolari (visto sopra).

Teorema 3.22.4. Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento, $x_0 \in X$, $F = p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$, allora $\exists \varphi \in \text{Aut}_X(E)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 \iff p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_2))$.

Dimostrazione. Per il **Teorema di sollevamento (Teorema 3.21.4)** applicato al diagramma a fianco, l'esistenza di un morfismo φ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ equivale alla condizione

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) \subseteq p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_2))$$

Applicando lo stesso argomento alla costruzione di un morfismo ψ tale che $\psi(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$, si ottiene che l'isomorfismo cercato esiste se e solo se $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_2))$.



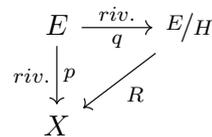
□

Corollario 3.22.5. $\text{Aut}_X(E)$ agisce transitivamente sulla fibra $F = p^{-1}(x_0) \iff \exists \tilde{x} \in F$ tale che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0) \iff \forall \tilde{x} \in F$ $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione. Per il **Teorema 3.22.4**, l'azione di $\text{Aut}_X(E)$ su F è transitiva $\iff p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ non dipende da \tilde{x} al variare di $\tilde{x} \in F$, ma $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \text{Stab}(\tilde{x})$ tramite azione di monodromia. Ora, gli stabilizzatori di due punti di F ⁶² sono coniugati e, al variare dei punti nell'orbita, otteniamo in effetti tutti i coniugati di uno stabilizzatore. Dunque l'azione di $\text{Aut}_X(E)$ su F è transitiva \iff tutti i coniugati di $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ coincidono tra loro ⁶³, cioè se $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ è normale. □

$G < \text{Aut}_X(E)$ agisce in modo propriamente discontinuo su E : $E \rightarrow E/G$ è un rivestimento. Se $H < \text{Aut}_X(E)$, anche H agisce in modo propriamente discontinuo e anche $E \rightarrow E/H$ è un rivestimento.

Osservazione 87. $\forall h \in H$ (oppure $\in G$), $p \circ h = p$.



Osservazione 88. Anche $R : E/H \rightarrow X$ è un rivestimento.

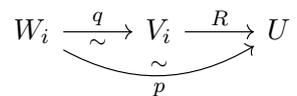
Dimostrazione. Vogliamo mostrare che possiamo coprire X con aperti ben rivestiti rispetto a R . Sia U un aperto ben rivestito per la mappa p e inoltre assumiamo che U sia connesso per archi. Visto che è ben rivestito, $E \supseteq p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$ tali che $p|_{W_i} : W_i \xrightarrow{\sim} U \implies W_i$ sono connessi per archi (quindi connessi) $\forall i \in I \implies W_i$ sono le componenti connesse di $p^{-1}(U)$.

Osserviamo che H manda $p^{-1}(U)$ in se stesso: infatti, se $w \in p^{-1}(U)$, allora $p(hw) = p(w) \in U$. Quindi H permuta le componenti connesse di $p^{-1}(U)$ e perciò, se $h \cdot W_i \cap W_j \neq \emptyset$, allora $h \cdot W_i = W_j$ per qualche $i, j \in I$.

Consideriamo quindi $V_i = q(W_i)$ aperti di E/H . Se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, allora $V_i = V_j$: infatti, $\exists x \in V_i \cap V_j$ tale che $x = q(y_i) = q(y_j)$, con $y_i \in W_i$ e $y_j \in W_j$, cioè y_i e y_j hanno la stessa immagine, cioè $\exists h$ tale che $h \cdot y_i = y_j \implies h \cdot W_i = W_j \implies V_i = V_j$, poiché le immagini tramite omeomorfismo di due elementi coniugati devono necessariamente corrispondere.

Quindi, $q(p^{-1}(U)) = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigsqcup_{i \in I'} V_i$, con $I' \subseteq I$ e V_i aperti di E/H , ma

$$q(p^{-1}(U)) = R^{-1}(U) \implies R^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i.$$



Vogliamo mostrare dunque che anche $R : V_i \rightarrow U$ sia un omeomorfismo: $q : W_i \xrightarrow{\sim} V_i$ è omeomorfismo per definizione, mentre $p : W_i \rightarrow U$ è omeomorfismo per ipotesi, perciò R lo è, perché la composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo. □

⁶¹ Ciò avviene, per quanto appena visto, per i rivestimenti del tipo $E \rightarrow E/G$ ($\text{Aut}(p) = G$ e G agisce transitivamente).

⁶² Cioè di punti della stessa orbita per la monodromia, che agisce transitivamente su F .

⁶³ Per un $\tilde{x} \in F$ o per tutti gli $\tilde{x} \in F$.

Lo scopo adesso è costruire tutti i rivestimenti così: $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}/H \longrightarrow X$.

Ricordiamo che $p : E \longrightarrow X$ è regolare $\iff \forall x_0 \in X \text{ Aut}_X(E)$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x_0)$.

Osservazione 89. Se $E \longrightarrow X$ è regolare, allora $E/\text{Aut}_X(E) \longrightarrow X$ è un rivestimento bigettivo e dunque un omeomorfismo.

Osservazione 90. Se $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ è il rivestimento universale, allora è regolare.

Infatti, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)^{64}) = \{\text{Id}\}$ che è normale.

Osservazione 91. Non tutti i rivestimenti sono regolari.

Esempio 75. Se $X = S^1 \vee S^1$, allora $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, generato da α e β : $\alpha \curvearrowright x_0 \curvearrowleft \beta$.

Senza perdita di generalità, assumiamo $\tilde{x}_i \cdot \alpha = \tilde{x}_{i+1}$, cioè $p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_{-2} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_{-1} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_0 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_2 & \xrightarrow{\alpha} & \dots \\ & & \uparrow & & \\ & & \beta_{-2} & & \beta_{-1} & & \beta_0 & & \beta_1 & & \beta_2 & & \end{array}$$

p sulla retta è un rivestimento universale della prima circonferenza (quella con cammino α), mentre p su β_i è un isomorfismo tra β_i e la seconda circonferenza (quella con cammino β).

Notiamo che $\text{Aut}_X(E)$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x_0)$, quindi questo rivestimento è regolare.

Cambiamo dunque rivestimento:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_{-2} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_{-1} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_0 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}_2 & \xrightarrow{\alpha} & \dots \\ & & \uparrow & & \\ & & \beta_{-2} & & \beta_{-1} & & \beta_0 & & \beta_1 & & \beta_2 & & \\ & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}'_{-2} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}'_{-1} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}'_0 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}'_1 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{x}'_2 & \xrightarrow{\alpha} & \dots \end{array}$$

le due rette parallele si avvolgono su α come due rivestimenti universali, tutti i β_i sono in isomorfismo con β e tutti gli \tilde{x}_i , anche se topologicamente diversi tra loro, sono isomorfi a x_0 ⁶⁵. Dunque è un rivestimento di un bouquet di 2 circonferenze. Visto che gli elementi di $\text{Aut}_X(E)$ non possono scambiare, ad esempio, \tilde{x}_0 con \tilde{x}_1 , tale rivestimento non è regolare.

Proposizione 3.22.6. Se $p : E \longrightarrow X$ è regolare, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in E$ è tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$, allora $\text{Aut}_X(E) \cong \pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$.

Dimostrazione. Sia $F : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \text{Aut}_X(E)$, con $F([\alpha]) = g$, tale che $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = g(\tilde{x}_0)$; tale g esiste per definizione di rivestimento regolare ed è unico per il **Teorema 3.10.1**.

F è un omomorfismo di gruppi: definiamo $F([\alpha]) = g$ e $F([\beta]) = h$,

$$\tilde{x}_0 \cdot [\alpha * \beta] = g(\tilde{x}_0) \cdot [\beta] = {}^{66} g(\tilde{x}_0 \cdot [\beta]) = g \circ h(\tilde{x}_0)$$

Quindi $F([\alpha * \beta]) = g \circ h$.

Vediamo che F è surgettivo: sia $g \in \text{Aut}_X(E)$. Il $\pi_1(X, x_0)$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x_0)$, dunque $\exists [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ tale che $g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha] \implies F([\alpha]) = g$.

Inoltre, $[\alpha] \in \text{Ker } F \iff \tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_0 \iff [\alpha] \in \text{Stab}(\tilde{x}_0) = {}^{67} p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$, quindi, per il **Primo Teorema di Omomorfismo di gruppi**, $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \cong \text{Aut}_X(E)$. \square

Corollario 3.22.7. Se E è il rivestimento universale, allora $\text{Aut}_X(E) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Definizione 3.22.3. Due rivestimenti p_1, p_2 di X si dicono **isomorfi**, se $\exists \varphi, \psi$ tali che $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{E_1}$ e $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{E_2}$.

Teorema 3.22.8. Se X ha un rivestimento universale $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ tale che $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$, allora

$$\{\text{Rivestimenti regolari di } X\} {}^{68} \longleftrightarrow \{\text{Sottogruppi normali di } \pi_1(X, x_0)\}$$

⁶⁴È semplicemente connesso.

⁶⁵Sono tutti punti con 4 rette che escono/entrano.

⁶⁶Per la **Proposizione 3.22.1**.

⁶⁷Per il **Teorema 3.11.2**.

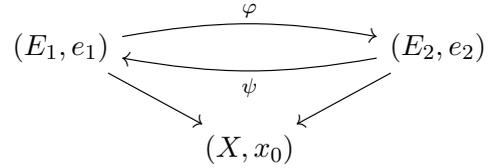
⁶⁸A meno di isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $\Phi : \{\text{Rivestimenti regolari di } X\}^{69} \longrightarrow \{\text{Sottogruppi normali di } \pi_1(X, x_0)\}$.

Dato $p : E \longrightarrow X$ rivestimento regolare e $p(e_0) = x_0$, gli associamo $p_*(\pi_1(E, e_0)) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$ e non dipende dalla scelta di $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ ⁷⁰.

Φ è *iniettiva*: siano $p_1 : E_1 \longrightarrow X$, con $p_1(e_1) = x_0$, e $p_2 : E_2 \longrightarrow X$, con $p_2(e_2) = x_0$, rivestimenti tali che $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$. Dunque, per il

Teorema 3.21.4, $\exists \varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ tale che $\varphi(e_1) = e_2$ ed $\exists \psi : E_2 \longrightarrow E_1$ tale che $\psi(e_2) = e_1$, perciò $\psi \circ \varphi(e_1) = e_1$ e $\varphi \circ \psi(e_2) = e_2$, cioè $\psi \circ \varphi$ e Id_{E_1} sono sollevamenti di p_1 che coincidono su e_1 . Quindi, per il **Teorema 3.10.1**, $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{E_1}$. Analogamente $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{E_2}$.



Concludiamo quindi che i due rivestimenti sono isomorfi e che la mappa Φ è iniettiva.

Lemma 3.22.9. Dato $H < \pi_1(X, x_0)$ gli corrisponde un $K < \text{Aut}_X(\tilde{X})$.

Se $E = \tilde{X}/K$ e $q : \tilde{X} \longrightarrow E$ è la proiezione, allora $p : E \longrightarrow X$ è un rivestimento di X . Se $e_0 = q(\tilde{x}_0)$, allora $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}_X(\tilde{X}) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X, x_0) \\ g & \longleftrightarrow & [\alpha] \\ K & \longleftrightarrow & H \end{array}$$

Il **Lemma 3.22.9** conclude la dimostrazione del **Teorema 3.22.8** (dimostra che Φ è surgettiva).

Dimostrazione. (**Lemma 3.22.9**) Ricordiamo che $p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mid e_0 \cdot [\alpha] = e_0\}$.

$$e_0 \cdot [\alpha] = \begin{array}{c} \text{azione su } p^{-1}(x_0) \subseteq E \\ q(\tilde{x}_0) \cdot [\alpha] \end{array} = \overset{71}{=} \begin{array}{c} \text{azione su } \pi^{-1}(x_0) \subseteq \tilde{X} \\ q(\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]) \end{array}$$

$$q(\tilde{x}_0) = q(\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]) = q(g(\tilde{x}_0)) \iff g \in K$$

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{\alpha \mid \text{il } g \text{ corrispondente è in } K\} = H. \quad \square$$

Questo conclude dunque anche la dimostrazione del **Teorema 3.22.8**. □

Esercizio 14. Classificare tutti i rivestimenti regolari (connessi) di $X = S^1 \vee S^1$ di grado 2 o 3 ⁷².

Grado 2: classifichiamo i sottogruppi normali di indice 2 di $\pi_1(X)$: la fibra è $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(E, e_0))$. Determiniamo i sottogruppi $H < \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ tali che $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$. Guardiamo dunque una mappa del tipo $\varphi : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tale che $\text{Ker } \varphi = H$.

$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ è generato da due elementi α e β , perciò abbiamo solo 3 possibilità ⁷³:

$$\begin{array}{l} \varphi : \begin{cases} \alpha \mapsto 1 \\ \beta \mapsto -1 \end{cases} \implies \alpha \curvearrowright \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} \bullet \curvearrowright \alpha \\ \varphi : \begin{cases} \alpha \mapsto -1 \\ \beta \mapsto 1 \end{cases} \implies \beta \curvearrowright \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha} \end{array} \bullet \curvearrowright \beta \\ \varphi : \begin{cases} \alpha \mapsto -1 \\ \beta \mapsto -1 \end{cases} \implies \begin{array}{c} \alpha \\ \curvearrowright \\ \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} \bullet \\ \curvearrowright \\ \beta \end{array} \end{array}$$

Grado 3: c'è un'attenzione ulteriore da fare: può essere che $\exists \varphi : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $\psi : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tali che $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi \iff \exists \chi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ tale che $\psi = \chi \circ \varphi$.

⁶⁹A meno di isomorfismo.

⁷⁰Usiamo il fatto che $p : E \longrightarrow X$ sia regolare.

⁷¹ $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \alpha_{\tilde{x}_0}(1) \implies q \circ \alpha_{\tilde{x}_0} = \alpha_{e_0}$ è un sollevamento di α da $q(\tilde{x}_0) = e_0 \implies q(\tilde{x}_0 \cdot [\alpha]) = q(\alpha_{\tilde{x}_0}(1)) = \alpha_{e_0}(1) = e_0 \cdot [\alpha]$.

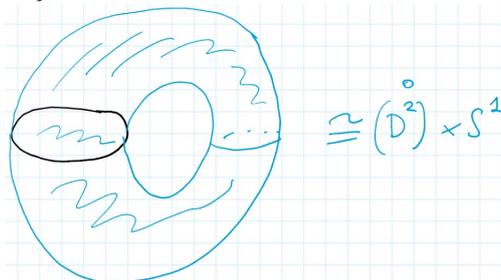
⁷²Vedasi **Esercizi VII settimana, Esercizio 80**.

⁷³Perché $\varphi : \begin{cases} \alpha \mapsto 1 \\ \beta \mapsto 1 \end{cases}$ non è surgettiva.

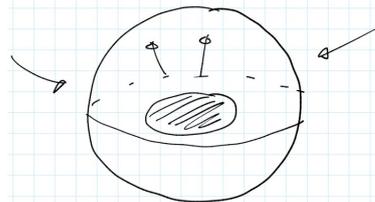
Esercizi VI settimana

Esercizio 71. Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ la circonferenza unitaria collocata su un piano orizzontale in \mathbb{R}^3 . Si calcoli $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C)$.

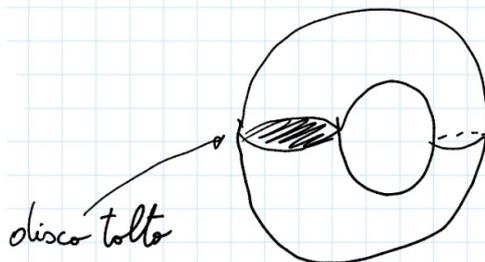
Dimostrazione. Siano $A = \mathbb{R}^3 \setminus D$, con $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, e $B = \text{“toro pieno aperto”}$ in figura:



A si retrae per deformazione, ad esempio, su $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$: dunque è connesso per archi e semplicemente connesso.



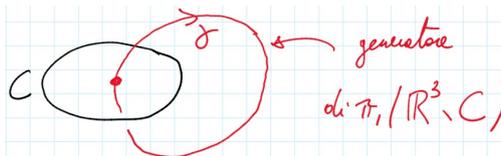
$B \cong (\mathring{D}^2) \times S^1$, per cui è connesso per archi e $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$ in quanto $B \sim S^1$ ⁷⁴.
 $A \cap B = B \setminus \mathring{D} \cong \mathring{D} \times (S^1 \setminus \{P\}) \cong \mathring{D} \times (0, 2\pi)$, che è contraibile, dunque semplicemente connesso:



Per il **Teorema 3.15.1**, poiché $A \cap B$ è connesso per archi e semplicemente connesso,

$$\pi_1(X) = \pi_1(A \cup B) = \pi_1(A) * \pi_1(B) = \{1\} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Il **Teorema di Van Kampen** ci dice anche chi sia un generatore, cioè quello di $\pi_1(B)$:



□

⁷⁴Si retrae per deformazione sul suo “cuore” che è un S^1 .

Esercizi VII settimana

Esercizio 76 (Teorema di Borsuk-Ulam).

Si mostri che non esistono funzioni continue $f : S^2 \rightarrow S^1$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$.

Dimostrazione. Per assurdo, si supponga che una tale f esista:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \quad 75 \\ S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

f si solleva, se $f_*(\pi_1(S^2, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, y_0))$ per qualche x_0, y_0 tali che $f(x_0) = p(y_0)$. Poiché S^2 è semplicemente connesso, f si solleva a \tilde{f} . Poniamo $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)$. Diciamo che $\exists x_0 \in S^2$ tale che $g(x_0) = 0$. Infatti, preso $x_1 \in S^2$ a caso, se $g(x_1) = 0$, allora abbiamo finito, altrimenti,

$$g(-x_1) = \tilde{f}(-x_1) - \tilde{f}(-(-x_1)) = \tilde{f}(-x_1) - \tilde{f}(x_1) = -g(x_1)$$

per cui $g(x_1)$ e $g(-x_1)$ hanno segni opposti, ma S^2 è connesso, per cui $g(S^2)$ è connesso, dunque $0 \in g(S^2)$, cioè $\exists x_0 \in S^2$ tale che $g(x_0) = 0$. Quindi $\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(-x_0)$, da cui

$$f(x_0) = p(\tilde{f}(x_0)) = p(\tilde{f}(-x_0)) = f(-x_0) \not\equiv 76$$

□

In realtà abbiamo dimostrato di più: $\forall f : S^2 \rightarrow S^1$ continua, $\exists x_0 \in S^1$ tale che $f(x_0) = f(-x_0)$. Vale ancora di più:

Esercizio 77. (1) Per ogni applicazione continua $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ esiste $x \in S^2$ tale che $g(x) = g(-x)$.

Dimostrazione. (1) Per assurdo, sia $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua tale che $g(x_0) \neq g(-x_0) \forall x_0 \in S^2$, quindi è ben definita e continua la mappa $f : S^2 \rightarrow S^1$ tale che $f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$. Vale inoltre, per costruzione, $f(-x) = -f(x)$, ma questo contraddice l'**Esercizio 76** $\not\equiv$ □

Esercizio 77 (1) \implies **Esercizio 77** (2) “In ogni istante, sulla superficie terrestre esistono due punti antipodali aventi stessa temperatura e pressione atmosferica.”.

⁷⁵ p è il rivestimento universale.

⁷⁶Volevamo $f(x_0) = -f(-x_0)$.

FUNZIONI OLOMORFE

Dato $U \subseteq \mathbb{R}^m$ siamo interessati alle funzioni del tipo $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, cioè colonne del tipo $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$,

che hanno derivata parziale rispetto a un vettore v definita come $\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v} \end{pmatrix}$ e, in particolare, anche

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}.$$

Definizione 4.0.1. f è **differenziabile** in $p \in U$, se esiste un'applicazione lineare L tale che

$$f(x+p) = f(p) + L(x) + o(|x|), \text{ con } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(|x|)}{|x|} = 0$$

Tale applicazione L , se esiste, si chiama **differenziale di f in p** e si indica con df_p . Perciò $\frac{\partial f}{\partial v} = L(v)$.

Noi siamo particolarmente interessati alle situazioni del tipo: $f : U \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, e, per comodità, invece di pensare $f = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$, lo identificheremo con $f = g + ih$, dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial v} + i \frac{\partial h}{\partial v} \quad \text{e} \quad df_p = dg_p + idh_p$$

Inoltre, in \mathbb{C} sono definiti anche:

Prodotto: data $f, \varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$, è ben definita $f\varphi$;

Coniugato: data $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, è ben definita \bar{f} ;

Reciproco: data $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, se $f \neq 0$, è ben definita $\frac{1}{f}$.

Osservazione 92. Consideriamo l'applicazione $\mu : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e, se consideriamo $z = x + iy$ e $w = u + iv$, si ha

$$\mu(z, w) = xu - yv + i(xv + yu)$$

μ è C^∞ e, in particolare, è differenziabile:

$$d\mu_{(z_0, w_0)}(z, w) = d\mu_{(z_0, w_0)}(z, 0) + d\mu_{(z_0, w_0)}(0, w) = zw_0 + z_0w$$

poiché $z \rightarrow zw_0$ è lineare e quindi il differenziale è uguale alla funzione; analogamente per $w \rightarrow z_0w$.

Corollario 4.0.1. Se f, φ sono differenziabili in p ,

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & (f(p), \varphi(p)) & & \\ & & (z, w) & \longmapsto & zw \end{array}$$

allora $d(f\varphi)_p = f(p) d\varphi_p + \varphi(p) df_p$

Esercizio 15. Se f è differenziabile, allora

$$(d\bar{f})_p = \overline{df_p} \quad e \quad d\frac{1}{f} = -\frac{df}{f^2}$$

Tali formule (analoghe) possono essere ottenute anche per $\frac{\partial}{\partial v}$.

Consideriamo adesso $U \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ e studiamo quindi funzioni $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

$f(z) = z^1$ e $f(z) = \bar{z}^2$ sono \mathbb{R} -lineari:

$$dz_p(u) = u \quad d\bar{z}_p(u) = \bar{u}$$

Cioè, se indichiamo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$, dove x e y sono le funzioni che associano a $p \in \mathbb{C}$ la sua componente reale e la sua componente immaginaria, allora

$$dz = dx + i dy \quad e \quad d\bar{z} = dx - i dy$$

z è \mathbb{C} -lineare, cioè, preso $\lambda \in \mathbb{C}$, $z(\lambda u) = \lambda z(u)$, e \bar{z} è \mathbb{C} -antilineare, cioè $\bar{z}(\lambda u) = \bar{\lambda} \bar{z}(u)$.

Osservazione 93. $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 4 su \mathbb{R} e

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})^3 \oplus \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})^4$$

Dimostrazione. $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})) = 1 \implies \dim_{\mathbb{R}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})) = 2$ e $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})) = 1 \implies \dim_{\mathbb{R}}(\text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})) = 2$. Basta quindi dimostrare che $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cap \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{0\}$: consideriamo dunque un elemento $T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cap \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tale che $T(1) = \alpha$, quindi, visto che $T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, T è \mathbb{C} -lineare, $T(i) = i\alpha$ e, poiché $T \in \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, T è \mathbb{C} -antilineare, cioè $T(i) = -i\alpha \implies i\alpha = -i\alpha \implies \alpha = 0 \implies T = 0$. \square

Dunque,

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \oplus \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} dz \oplus \mathbb{C} d\bar{z}$$

in cui infatti $dz \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ e $d\bar{z} \in \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Se f è una funzione $U \rightarrow \mathbb{C}$, con $U \subseteq \mathbb{C}$, differenziabile in un punto p , allora

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x}(p) dx_p + \frac{\partial f}{\partial y}(p) dy_p$$

Vorremmo però riscrivere df rispetto a dz e $d\bar{z}$.

Sia dunque $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ differenziabile in un punto p :

$$\begin{aligned} dz_p &= dx_p + i dy_p & d\bar{z}_p &= dx_p - i dy_p \\ \implies dx_p &= \frac{dz_p + d\bar{z}_p}{2} & \implies dy_p &= \frac{dz_p - d\bar{z}_p}{2i} \\ \implies df &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{2i} (dz - d\bar{z}) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial z}} dz + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} d\bar{z} = \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z} dz}_{\text{parte } \mathbb{C}\text{-lineare}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}_{\text{parte } \mathbb{C}\text{-antilineare}} \end{aligned}$$

¹Che indicheremo semplicemente come la funzione z .

²Che indicheremo semplicemente come la funzione \bar{z} .

³Cioè $\forall T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$ e $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

⁴Cioè $\forall T \in \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$ e $T(\lambda u) = \bar{\lambda} T(u)$.

Definizione 4.0.2. Dati U un aperto di \mathbb{C} , $z_0 \in U$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, diciamo che f è **olomorfa in z_0** , se esiste

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} = f'(z_0) \quad ^5$$

f si dice **olomorfa in U** , se f è olomorfa in $z_0 \forall z_0 \in U$.

Esempio 76. $f(z) = z$ è olomorfa:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z} = 1$$

Esempio 77. $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{z}_0 - \bar{z}_0}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

e questo limite non esiste: $z = \rho e^{i\theta} \implies \frac{\bar{z}}{z} = e^{-2i\theta}$

Teorema 4.0.2. Dati U aperto di \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in U$, i seguenti fatti sono equivalenti:

- ① f è olomorfa in z_0 ;
- ② f è differenziabile in z_0 e df_{z_0} è \mathbb{C} -lineare;
- ③ f è differenziabile in z_0 e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$;
- ④ f è differenziabile in z_0 , $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}$ e $\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}$ (cioè f soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann).

Inoltre, se vale una tra queste, allora $df_{z_0}(u) = f'(z_0)u$.

Dimostrazione. (② \iff ③)

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z} dz}_{\mathbb{C}\text{-lineare}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}_{\mathbb{C}\text{-antilineare}}$$

df è \mathbb{C} -lineare $\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

(③ \iff ④) Detta $f = g + ih$, con $g = \operatorname{Re}(f)$ e $h = \operatorname{Im}(f)$,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g + ih)}{\partial x} + i \frac{\partial(g + ih)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial h}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} \end{cases}$$

(① \implies ②) e dimostriamo anche che $df_{z_0}(u) = f'(z_0)u$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z} = f'(z_0) \iff \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z + z_0) - f(z_0) - z f'(z_0)}{z} = 0$$

Perciò, se f è olomorfa in z_0 , allora

$$f(z + z_0) = f(z_0) + f'(z_0)z + \rho(z), \text{ con } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\rho(z)}{z} = 0$$

quindi

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\rho(z)}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\rho(z)}{z} \frac{z}{|z|} = 0$$

⁵Si chiama **derivata olomorfa** di f in z_0 .

Segue che f è differenziabile e anche che $df_{z_0}(z) = f'(z_0)z$.

(2) \implies (1) Sappiamo che $f(z + z_0) = f(z_0) + df_{z_0}(z) + \rho(z)$, con $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\rho(z)}{|z|} = 0$, che riscriviamo come

$$f(z + z_0) = f(z_0) + Az + \rho(z), \text{ con } Az = df_{z_0}(z) = df_{z_0}(1)z$$

$$\implies \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z} = A + \frac{\rho(z)}{z} \implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z} = A + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\rho(z)}{z} = A$$

□

Osservazione 94. Date f, g olomorfe in z_0 :

1. $f + g$ è olomorfa in z_0 e $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;
2. fg è olomorfa in z_0 e $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$;
3. Se $f(z_0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ è olomorfa in z_0 e $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$;
4. $g \circ f$ è olomorfa e $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$;
5. Non è vero che, se f è olomorfa, allora \bar{f} è olomorfa;
6. Dati $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ funzione C^1 , $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa in U e $z_0 \in U$, se $f'(z_0) \neq 0$, allora f è localmente invertibile, cioè $\exists V, W$ intorno di z_0 e $f(z_0) = z_1$ tali che $f|_V : V \rightarrow W$ è bigettiva, $f^{-1} : W \rightarrow V$ è olomorfa e $(f^{-1})'(z_1) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Teorema 4.0.3. Se $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una funzione C^1 con $d\varphi(p)$ invertibile, allora φ è localmente invertibile, cioè $\exists V, W$ intorno di p e $\varphi(p) = q$ tali che $f|_V : V \rightarrow W$ è bigettiva e $f|_V^{-1} : W \rightarrow V$ è C^1 , con

$$df^{-1}(q) = (df(p))^{-1}$$

Dimostrazione. (**Osservazione 94**) (6.) Se f è derivabile in z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, allora $df_{z_0}(u) = f'(z_0)u$, quindi df_{z_0} è invertibile e

$$(df_{z_0})^{-1}(u) = \frac{1}{f'(z_0)}u$$

□

Quindi il **Teorema 4.0.3** garantisce che f sia localmente invertibile e che $(df_{z_0})^{-1}$ sia \mathbb{C} -lineare e quindi, in particolare, che l'inversa locale sia olomorfa.

Definizione 4.0.3. Dati E, X connessi e $U \subseteq X$, una **sezione** di un rivestimento $p : E \rightarrow X$ è una mappa $\sigma : U \rightarrow E$ continua tale che $p \circ \sigma = \text{Id}_U$.

Si dice **locale**, se U è un aperto di X , e **globale**, se $U = X$.

Osservazione 95. Per definizione, se p è un rivestimento, allora $\forall x \in X \exists U \subseteq X$ aperto con sezione locale definita su U .

Proposizione 4.0.4. Se un rivestimento ha una sezione, allora p è bigettiva ed è un omeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \sigma & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\text{Id}} & X \end{array}$$

Dimostrazione. Tale σ esiste, se

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \supseteq \text{Id}_X(\pi_1(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0) \iff p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = \pi_1(X, x_0)$$

Ricordiamo però che $p^{-1}(x_0) \longleftrightarrow \frac{\pi_1(X, x_0)}{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))}$.

Se esiste σ , allora la fibra ha cardinalità 1 $\implies p$ è un omeomorfismo.

□

Esempio 78. Dato $U = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f: U \rightarrow U$ è una funzione olomorfa (come lo era z):

$$z \mapsto z^2$$

$$f'(z) = 2z \neq 0 \text{ per } z \in U. \text{ } f \text{ inoltre è } C^1$$

f è un rivestimento: $\forall p \in U \ f^{-1}(p) = \{q, -q\}$, con $q^2 = p$, e $\exists V_p, V_q, V_{-q}$, rispettivamente, intorno di $p, q, -q$ tali che $f^{-1}(V_p) = V_q \sqcup V_{-q}$ e $f: V_q, V_{-q} \xrightarrow{\sim} V_p$.

Osservazione 96. f non ha una sezione. Se avesse $\sigma: U \rightarrow U$ tale che $f \circ \sigma = \text{Id}$, allora $\sigma(U) \simeq U$ e il rivestimento sarebbe sconnesso.

Non esiste dunque una sezione globale di $z \mapsto z^2$ su \mathbb{C}^* .

Localmente esistono sezioni e, poiché $f'(z) \neq 0$, possiamo assumere inoltre che le inverse locali siano olomorfe

$$\begin{array}{ccc} V_q & & V_{-q} \\ \swarrow \sim & & \swarrow \sim \\ & V_p & \\ \searrow \sigma_1 & & \searrow \sigma_2 \end{array}$$

Possiamo anche calcolarne la derivata: $\sigma_1'(p) = \frac{1}{2q}$, ricordando che $f(q) = p = q^2$ e $f'(q) = 2q$. Quindi, localmente, $(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

4.1 Serie di potenze e funzioni analitiche

Definizione 4.1.1. Una serie di potenze (centrata in 0) è una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con $a_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$.

Una serie di potenze centrata in z_0 è del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Fatto 4.1.1. Se una serie di potenze $f(z)$ centrata in 0 converge in $z = z_1$, allora converge assolutamente $\forall z$ tale che $|z| < |z_1|$. Inoltre, il raggio di convergenza R si calcola tramite la relazione

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

Definizione 4.1.2. Dato U un aperto di \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **analitica**, se $\forall z_0 \in U \exists \rho > 0$ e una serie di potenze centrata in z_0 tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ per } |z - z_0| < \rho$$

Proposizione 4.1.2. Una serie di potenze è una funzione analitica.

Dimostrazione. Lo dimostriamo nel caso in cui la serie di potenze sia centrata in 0.

Siano R il raggio di convergenza della serie e $U = B(0, R)$ aperta, dunque

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

Preso $z_0 \in U$, vogliamo dimostrare che, in un piccolo intorno di z_0 , f si scrive come una serie di potenze centrata in z_0 : scegliamo $\rho < R - |z_0| \implies B(z_0, \rho) \subset B(0, R_1)$, con $R_1 < R$.

Consideriamo dunque la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n |a_n| \binom{n}{i} |w|^i |z_0|^{n-i} \quad 6$$

che converge per $|w| < \rho$, infatti,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |w|^i |z_0|^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|w| + |z_0|)^n < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R_1^n$$

e converge, perché $R_1 < R$. Quindi anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_n \binom{n}{i} w^i z_0^{n-i}$$

la possiamo sommare nell'ordine che preferiamo. Se sommiamo prima in i ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + w)^n = f(z_0 + w)$$

Se invece sommiamo prima in n ,

$$\sum_{i=0}^{\infty} w^i \underbrace{\left(\sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n z_0^{n-i} \right)}_{b_i} = f(z_0 + w)$$

e, ponendo $w = z - z_0$,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} (z - z_0)^i b_i = f(z), \text{ per } |z - z_0| < \rho.}$$

□

⁶È a termini positivi, quindi possiamo sommarla nell'ordine che più ci piace.

Osservazione 97. Abbiamo dimostrato che f è analitica:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (z - z_0)^i b_i, \text{ con } b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n z_0^{n-i}$$

Proposizione 4.1.3. Dati U un aperto di \mathbb{C} e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$,

1. se f è analitica, allora f è olomorfa;
2. se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, allora $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che (2. \implies 1.) Se f è analitica e $z_0 \in U$, allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n b_n \iff f(w + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n b_n$$

Per 2., $f(w + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n b_n$ è derivabile, cioè è olomorfa, e quindi anche f è olomorfa in z_0 .

(2.) Supponiamo che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converga in $B(0, R)$. Se dimostriamo che f sia olomorfa in 0 e che $f'(0) = a_1$, allora ne deduciamo che f è olomorfa in ogni $z_0 \in U$ e che $f'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$. Sappiamo infatti che attorno a z_0

$$g(w) := f(z_0 + w) = \sum_{i=0}^{\infty} w^i b_i, \text{ con } b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n z_0^{n-i}$$

Se $g'(0) = b_1$, cioè g è olomorfa in 0, allora $f(z) = g(z - z_0)$ è olomorfa in z_0 e

$$f'(z_0) = g'(0) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

Dobbiamo dimostrare che f è olomorfa in 0 e $f'(0) = a_1$:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{a_0 + a_1 z + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} - a_0}{z} = a_1 + z \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \right)$$

Dobbiamo perciò dimostrare che

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \right) = 0$$

Ricordiamo però che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge in $|z| < \rho$, quindi anche $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}$ converge in $|z| < \rho$. Per $|z| < \frac{\rho}{2}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\rho}{2} \right)^{n-2}$$

che è una serie finita. Perciò

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\rho}{2} \right)^{n-2}$$

quindi $\lim_{z \rightarrow 0} z \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \right) = 0$. □

Osservazione 98. Abbiamo dimostrato che la derivata di una serie di potenze è a sua volta una serie di potenze, quindi le serie di potenze sono C^∞ e perciò anche le funzioni analitiche sono derivabili in senso complesso infinite volte.

Osservazione 99. Inoltre, abbiamo una formula per calcolare i coefficienti: data $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 & f'(0) &= a_1 \\ f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} a_n & f''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} a_n \end{aligned}$$

cioè, per induzione,

$$f^{(n)}(0) = n! a_n \implies a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Questa implica che il modo di scrivere una funzione come serie di potenze è unico, ovvero,

$$\text{se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ per } |z| < \rho, \text{ allora } a_n = b_n \forall n$$

Osservazione 100. Data $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n$, oppure $f(z) = g(z - z_0)$, con $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n a_n$,

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \text{ e } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Definizione 4.1.3. Dati U aperto di \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e $z_0 \in U$, $\text{ord}(f, z_0)$ ⁷ è detto **ordine di svanimento di f in z_0** ed è definito nel modo seguente:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}, \text{ per } |z - z_0| < \rho$$

k , cioè il più piccolo n tale che $a_n \neq 0$, si chiama **ordine di svanimento**.

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \text{ con } g(z_0) \neq 0$$

Equivalentemente, k è il più piccolo n tale che $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Se $a_n = 0 \forall n$, osserviamo che $f \equiv 0$ in un intorno di z_0 e in questo caso poniamo $\text{ord}(f, z_0) = +\infty$.

Teorema 4.1.4. Siano U un aperto di \mathbb{C} connesso, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ funzione analitica e $z_n \in U$ tale che $z_n \xrightarrow[n]{}$ $z_0 \in U$, con $z_n \neq z_0$. Se $f(z_n) = 0 \forall n$, allora $f \equiv 0$ su tutto U .

Osservazione 101. L'ipotesi di U connesso è necessaria.

Infatti, se U fosse fatto di due componenti connesse, allora potremmo sempre definire una funzione che è $f = 0$ in una componente e $f = 1$ nell'altra, sarebbe comunque olomorfa, analitica e quindi sviluppabile come serie di potenze in ogni intorno: localmente sarebbe come una funzione costante ma non identicamente nulla.

Dimostrazione. 1° step f è una serie di potenze centrata in z_0 convergente in $U = B(z_0, R)$: dunque $z_n \xrightarrow[n]{}$ z_0 e $f(z_n) = 0$. Se $f \not\equiv 0$, allora $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, con $k = \text{ord}(f, z_0)$ e $g(z_0) \neq 0$. g è analitica⁸, quindi $g \neq 0$ in un intorno V di z_0 , cioè $g(z) \neq 0 \forall z \in V$:

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \neq 0, \text{ per } z \in V \setminus \{z_0\}$$

perciò, se $z_n \xrightarrow[n]{}$ z_0 e $f(z_n) = 0$, allora $z_n = z_0$ per $n \gg 0$, che contraddice l'ipotesi. Dunque $f \equiv 0$ in un intorno di z_0 .

2° step Dal 1° step segue che, se $f(z) = 0$, allora ci sono due possibilità:

⁷Oppure $\text{ord}_{z_0}(f)$.

⁸In particolare olomorfa, differenziabile e quindi continua.

- z è uno zero di f isolato, cioè $\exists V$ intorno di z tale che $\forall z' \in V \setminus \{z\} f(z') \neq 0$;
- $\exists V$ intorno di z tale che $f \equiv 0$ in V .

Step finale Sia $W = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$, dunque $z_n \in W$ e, per continuità, anche $z_0 \in W$.

Dal 2° step, $\forall z \in W$ z è isolato oppure $z \in \overset{\circ}{W}$. Visto che almeno $z_0 \in \overset{\circ}{W}$, $\overset{\circ}{W} \neq \emptyset$.

Dimostriamo che $\overset{\circ}{W}$ è anche un chiuso di U e, per connessione di U , otteniamo $\overline{\overset{\circ}{W}} = U$, cioè la tesi.

Preso $z \in \overline{\overset{\circ}{W}} \cap U$, notiamo che $f(z) = 0$: infatti, poiché $f = 0$ su $\overset{\circ}{W}$, $f = 0$ su $\overline{\overset{\circ}{W}}$. Dunque $z \in W$.

- Se $z \in \overset{\circ}{W}$, abbiamo finito.
- Se z è isolato, allora $z \notin \overset{\circ}{W}$ e, poiché è isolato, $z \notin \overline{\overset{\circ}{W}}$: sicuramente non è il nostro caso.

□

Corollario 4.1.5. Date $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analitiche e U connesso, se $f = g$ in un aperto di U oppure se $f(z_n) = g(z_n)$ per una successione $U \ni z_n \xrightarrow[n]{} z_0 \in U$ e $z_n \neq z_0$, allora $f = g$.

Dimostrazione. Basta applicare il **Teorema 4.1.4** alla funzione $f - g$.

□

Supponiamo di avere una funzione analitica che, per qualche motivo, conosciamo in una piccola regione V : ci chiediamo se esista un aperto U più grande, cioè tale che $V \subseteq U$, in cui la funzione è definita. Nel caso di funzione a variabile reale, se è possibile estenderla in U , allora lo si può fare in moltissimi modi. Invece, per le funzioni analitiche c'è un solo modo per farlo per quanto abbiamo appena detto: se la conosciamo in V , allora la conosciamo dappertutto (e quindi, in particolare, anche in U).

Consideriamo ad esempio la funzione $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, con $\text{Re}(s) > 1$. Poiché è analitica, ζ si estende a

tutto \mathbb{C} e quindi ha senso chiedersi quanto facciano, ad esempio, $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ o $\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n, \dots$

4.2 Prolungamento analitico e domini massimali

Definizione 4.2.1. Siano $V \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso e $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ analitica. Un **prolungamento analitico** di f è una funzione analitica $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che U è connesso, $V \subseteq U$ e $F|_V = f$.

Osservazione 102. Se $F, G : U \rightarrow \mathbb{C}$ sono due prolungamenti analitici di f , allora $F = G$.

Definizione 4.2.2. Dato $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ prolungamento analitico di f , U si dice **dominio massimale**, se $\forall G : W \rightarrow \mathbb{C}$ prolungamento analitico di f , con W connesso e $U \subseteq W$, allora $W = U$.

Osservazione 103. Dato $V \subseteq \mathbb{C}$ connesso, $\forall f : V \rightarrow \mathbb{C}$ analitica esistono prolungamenti analitici $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ tali che U sia un dominio massimale.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} = \{F : U \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{prolungamenti analitici di } f \text{ (con } U \text{ connesso)}\}$.

Sicuramente $\mathcal{F} \neq \emptyset$, perché una $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ è tale che $f \in \mathcal{F}$.

Diciamo inoltre che \mathcal{F} è ordinato: dati $F_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ e $F_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $F_1 \subseteq F_2$, se $U_1 \subseteq U_2$ (osserviamo anche che $F_2|_{U_1} = F_1$).

Definizione 4.2.3. Una **catena** \mathcal{C} è un sottoinsieme di \mathcal{F} tale che, se $c, d \in \mathcal{C}$, allora sono confrontabili, cioè $c \leq d$ o $d \leq c$.

Lemma 4.2.1 (Zorn). (Uno degli enunciati equivalenti all'**Assioma della scelta**.)

Dato \mathcal{F} un insieme non vuoto parzialmente ordinato, se $\forall \mathcal{C}$ catena in $\mathcal{F} \exists f \in \mathcal{F}$ tale che $f \geq c \forall c \in \mathcal{C}$, allora \mathcal{F} ha almeno un elemento massimale m (ovvero, se $x \geq m$, allora $x = m$).

Sia quindi $\mathcal{C} = \{F_i : U_i \rightarrow \mathbb{C} \text{ estensioni analitiche di } f\}$ una catena in \mathcal{F} e inoltre $\forall i, j \ U_i \subseteq U_j$ oppure $U_j \subseteq U_i$. Possiamo quindi considerare $U = \bigcup_i U_i$ che è un aperto⁹.

Sia dunque $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che, dato $u \in U$,

$$F(u) = F_i(u) \iff u \in U_i$$

Non dipende da i perché, se $U_j \subseteq U_i$, allora $F_i|_{U_j} = F_j$. F è quindi ben definita e analitica. Inoltre

$$F|_V = F_i|_V = f$$

quindi, a sua volta, $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ è tale che $F \in \mathcal{F}$ e $F \geq F_i \forall i$.

Per il **Lemma di Zorn**, \mathcal{F} ha elementi massimali. Sia dunque $\mathcal{F} \ni G : W \rightarrow \mathbb{C}$ massimale, allora W è un dominio massimale. \square

Esponenziale

- Definiamo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

che converge $\forall z \in \mathbb{C}$ (converge assolutamente);

- Una ben nota proprietà è la seguente:

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n w^m}{n! m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(n+m)!}^N}{n! m!} z^n w^m \frac{1}{(n+m)!} = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} z^n w^{N-n} \frac{1}{N!} = \sum_{N=0}^{\infty} (z+w)^N \frac{1}{N!} = e^{z+w} \end{aligned}$$

⁹Unione di aperti.

- In particolare, se pensiamo $z = x + iy$,

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

in cui e^x è l'usuale esponenziale di un numero reale, mentre

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

Dunque $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Osservazione 104. $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$.

Infatti, $e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $\cos y + i \sin y \neq 0 \forall y \in \mathbb{R}$.

Osservazione 105. $e^z = 1 \iff e^x \cdot e^{iy} = 1$

$$|e^z| = e^x \quad \arg(e^z) \equiv y \pmod{2\pi} \implies x = 0 \text{ e } y = 2k\pi$$

Quindi le soluzioni di $e^z = 1$ sono gli $z = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

In generale, se $\alpha \neq 0$, $e^z = \alpha \iff e^x \cdot e^{iy} = \alpha$

$$|e^x \cdot e^{iy}| = e^x = |\alpha| \implies x = \log |\alpha|$$

$$\arg(e^x \cdot e^{iy}) \equiv y \pmod{2\pi} \equiv \arg(\alpha) \pmod{2\pi} := \theta$$

Dunque $y = \theta + 2k\pi \implies z = \log |\alpha| + i(\theta + 2k\pi)$.

Quindi la funzione $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$
 $z \longmapsto e^z$ è surgettiva ed è un rivestimento. Inoltre, poiché \mathbb{C} è semplicemente connesso, è il rivestimento universale.

Troviamo dunque un aperto ben rivestito che contenga 1. I punti nella fibra di \exp sopra 1 sono

$$z_k = 2k\pi i, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Scegliamo ρ piccolo e sia $U = B(1, \rho)$. Dato $w \in U$, $e^z = w$ ha soluzione

$$w_k = \log |w| + i \arg(w) + 2k\pi$$

Se ρ è abbastanza piccolo, allora $-\varepsilon < \arg(w) < \varepsilon$ e l'applicazione $w \mapsto \arg(w)$ è continua. Per $w \in U$, la mappa $w \mapsto (\log |w|, \arg(w)) = \log |w| + i \arg(w)$ è un omeomorfismo tra U e un piccolo aperto $W \subseteq \mathbb{C}$ che contiene 0.

$$\exp^{-1}(U) = W + 2\mathbb{Z}\pi i$$

Se fissiamo $W + 2k\pi i$,

$$\begin{array}{ccc} W + 2k\pi i & \xrightarrow{\sim \exp} & U \\ & \searrow \sim & \nearrow \exp \\ & & W \end{array}$$

Infatti, visto che $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ e $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$, $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$
 $z \longmapsto e^z$ è l'estensione di $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$
 $t \longmapsto e^{it} = (\cos t, \sin t)$, cioè è l'estensione del rivestimento universale di S^1 a tutto \mathbb{C}^* .

Osservazione 106. Per la **Proposizione 4.0.4**, non esiste $\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\exp \circ \log = \text{Id}$.

Domini massimali per il Logaritmo

Data $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, la sua derivata è $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$, è un rivestimento e localmente esiste un'inversa: per esempio, vicino ad 1 abbiamo costruito un'inversa $w \rightarrow \log |w| + i \arg(w)$, con $-\varepsilon < \arg(w) < \varepsilon$. Questa inversa locale è olomorfa. $\exp(0) = 1$ e $\exp'(0) = 1$ ci dicono che esiste un'inversa olomorfa

$$\mathcal{L} : \text{intorno di } 1 \mapsto \text{intorno di } 0$$

Questa \mathcal{L} deve coincidere con l'inversa locale continua che abbiamo già scelto, quindi quella che abbiamo già scritto è olomorfa:

$$\mathcal{L}'(z) = \frac{1}{\exp'(\mathcal{L}(z))} = \frac{1}{\exp(\mathcal{L}(z))} = \frac{1}{z}$$

In realtà, in $B(1, 1)$ \mathcal{L} la sappiamo scrivere:

$$\log(1+z) = {}^{10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \text{ converge per } |z| < 1$$

$$\implies \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}\right) = 1+z \text{ per } z \in \mathbb{R}$$

Per il **Teorema 4.1.4**¹¹, vale $\forall z$ tale che $|z| < 1$. Perciò

$$\mathcal{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

Vogliamo quindi determinare dei domini massimali in cui è definito il logaritmo (per **Esercizio**).

¹⁰Questa uguaglianza vale per $z \in \mathbb{R}$.

¹¹Sono due funzioni olomorfe.

4.3 Integrazione di 1-forme

Definizione 4.3.1. Dato U aperto di \mathbb{C} , una funzione $\omega : U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e \mathbb{R} -lineare nella seconda variabile è detta **1-forma**.

Osservazione 107. Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione C^1 , allora df è una 1-forma e $df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

Definizione 4.3.2. Le 1-forme tali che $\omega = df$ si dicono **esatte**.

Una 1-forma si dice **localmente esatta** (o **chiusa**), se $\forall p \in U \exists W$ intorno di p e $\omega|_{W \times \mathbb{C}}$ è esatta, ovvero se $\exists g : W \rightarrow \mathbb{C}$ funzione C^1 tale che $dg = \omega$ su W .

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ è una curva C^1 e $\omega : U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una 1-forma continua su U , allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}[\gamma'(t)] dt$$

Osservazione 108. Questa definizione non dipende dalla parametrizzazione: siano $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ C^1 tale che $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ curva C^1 , dunque $\delta = \gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow U$ e

$$\int_{\delta} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\delta} \omega &= \int_c^d \omega_{\delta(t)}[\delta'(t)] dt = \int_c^d \omega_{\gamma(\varphi(t))}[\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))] dt = \int_c^d \varphi'(t)\omega_{\gamma(\varphi(t))}[\gamma'(\varphi(t))] dt = \\ &\stackrel{s=\varphi(t)}{=} \int_a^b \omega_{\gamma(s)}[\gamma'(s)] ds = \int_{\gamma} \omega \end{aligned}$$

□

Esercizio 16. $\int_{\gamma^{-1}} \omega = -\int_{\gamma} \omega$.

Osservazione 109. Se $\omega = df$ e γ è una curva C^1 , allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}[\gamma'(t)] dt = \int_a^b df_{\gamma(t)}[\gamma'(t)] dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \\ &\implies \int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

4.3.1 Integrazione lungo curve C^1 a tratti

Definizione 4.3.3. Dato U aperto di \mathbb{C} , la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ si dice **C^1 a tratti**, se è continua e $\exists c_0 = a < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$ tali che $\gamma|_{[c_i, c_{i+1}]}$ sia C^1 .

Se γ è definita come sopra, allora

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[c_i, c_{i+1}]}} \omega$$

Osservazione 110. Anche per curve C^1 a tratti,

$$\int_{\gamma} df = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[c_i, c_{i+1}]}} df = \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(c_{i+1})) - f(\gamma(c_i)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Teorema 4.3.1. Se ω è una 1-forma su U continua e chiusa (localmente esatta), α, β sono due curve C^1 a tratti in $\Omega(z_0, z_1, U)$ e supponiamo $\alpha \sim \beta$ ¹², allora $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$.

¹²Con estremi fissati, cioè l'omotopia lascia fisso z_0 e z_1 .

Osservazione 111. Se $\omega = df$, allora il **Teorema 4.3.1** è ovvio:

$$\int_{\alpha} \omega = f(z_1) - f(z_0) = \int_{\beta} \omega$$

Dimostrazione. Sia $H : I \times I \rightarrow U$ l'omotopia di cammini. $\forall p \in I \times I$ possiamo considerare $H(p) \in U$: $\exists B_p = B(H(p), \rho_p)$ intorno tale che $\omega|_{B_p}$ sia esatta: $\omega = df$.

I $V_p = H^{-1}(B_p)$ formano un ricoprimento di $I \times I$.

Quindi esiste un numero $\delta > 0$ tale che $\forall p \in I \times I$ $B(p, \delta) \subseteq V_q$ per qualche q . Scegliendo $N \gg 0$, possiamo dividere $I \times I$ in N^2 quadratini Q tutti uguali tali che ognuno di essi sia contenuto in V_p per qualche p . Consideriamo le curve $\gamma_0 = \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_N = \beta$: γ_1 è una spezzata che in $\frac{i}{N}$ vale $H(\frac{1}{N}, \frac{i}{N})$. Similmente, definiamo γ_j per $j = 2, \dots, N-1$.

Allo stesso modo, definiamo $z_0 = \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N = z_1$. Fissiamo un quadratino Q di vertici A, B, C, D :

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_{\delta_j} \omega + \int_{\gamma_{i+1}} \omega - \int_{\delta_{j+1}} \omega - \int_{\gamma_i} \omega$$

Osserviamo però che $H(A), H(B), H(C), H(D) \in B_p$ ¹³ per qualche p , ma B_p è convessa e quindi le immagini di $\delta_j, \gamma_i, \delta_{j+1}, \gamma_{i+1}$ sono contenute in B_p . Perciò

$$\int_Q \omega = \int_Q df = f(A) - f(A) = 0 \implies \sum_{i,j=0}^{N-1} \int_{Q_{ij}} \omega = 0$$

Dunque

$$0 = \sum_{i,j=0}^{N-1} \int_{\partial Q_{ij}} \omega \stackrel{14}{=} \int_{z_0} \omega + \int_{\beta} \omega - \int_{z_1} \omega - \int_{\alpha} \omega$$

quindi, visto che $\int_{z_0} \omega = \int_{z_1} \omega = 0$ ¹⁵, $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$. □

Osservazione 112. Dati ω chiusa e U aperto di \mathbb{C} , $\Phi : \begin{matrix} \pi_1(z_0, U) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [\alpha] & \longmapsto & \int_{\alpha} \omega \end{matrix}$.

Lo sappiamo fare se $[\alpha]$ ha un rappresentante C^1 a tratti¹⁶.

Osservazione 113. Per il **Teorema 4.3.1**, $\int_{\alpha} \omega$ non dipende dalla scelta di $\gamma \in [\alpha]$ (C^1 a tratti).

Osservazione 114. Φ è un omomorfismo di gruppi: $\int_{\alpha*\beta} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega$.

Lemma 4.3.2. Siano ω una 1-forma chiusa su U aperto di \mathbb{C} e $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow U$ due curve chiuse C^1 a tratti. Se α è omotopo a β come mappe da S^1 in U , ovvero esiste un'omotopia $H : S^1 \times I \rightarrow U$ tale che $H_0 = \alpha$ e $H_1 = \beta$, allora $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$.

Dimostrazione. Pensiamo α, β come curve da I in U

$$\gamma(t) = H(t, 0) = H(t, 1) \quad \forall t$$

Quindi $\alpha*\gamma \sim \gamma*\beta$ come curve in $\Omega(z_0, z_1, U)$ ^a, ovvero come curve con estremi fissati. Dal **Teorema 4.3.1**, abbiamo

$$\int_{\alpha} \omega + \int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha*\gamma} \omega = \int_{\gamma*\beta} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\beta} \omega$$

e otteniamo la tesi. □

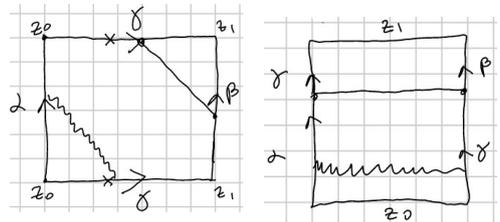
^aDimostrarlo per **Esercizio**.

¹³È una palletta in cui ω è esatta.

¹⁴In questa somma l'integrale lungo i cammini "interni" si semplifica.

¹⁵ z_0 e z_1 sono curve costanti.

¹⁶Per un aperto di \mathbb{C} questo è vero.



4.4 Criteri per l'esattezza di una 1-forma

Teorema 4.4.1. *Data ω una 1-forma su U aperto di \mathbb{C} , sono equivalenti:*

- 1) ω è esatta.
- 2) $\int_{\alpha} \omega = 0$ per ogni α curva chiusa C^1 a tratti.
- 3) $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$ per α, β curve C^1 a tratti tali che $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$.
- 4) $\int_{\alpha} \omega = 0$ per ogni α curva chiusa spezzata con lati paralleli agli assi.
- 5) $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$ per α, β spezzate con lati paralleli agli assi e tali che $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$.

Dimostrazione. 1) \implies 2) È chiaro: se $\omega = df$, allora

$$\int_{\alpha} df = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = 0 \iff \alpha(0) = \alpha(1)$$

2) \implies 3) Se $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$, allora consideriamo $\gamma = \alpha * \beta^{-1}$ che è C^1 a tratti e $\gamma(0) = \gamma(1)$, dunque

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha * \beta^{-1}} \omega = \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega \implies \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$$

3) \implies 2) Se α è chiusa, allora $\alpha(0) = \alpha(1) = z_0$. Sia β la curva costante z_0 :

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega = 0^{17}$$

4) \iff 5) Analogamente a 2) \iff 3).

2) \implies 4) È ovvio: 2) è un'affermazione su tutte le curve C^1 a tratti mentre 4) solo sulle spezzate.

5) \implies 1) Usiamo il seguente

Lemma 4.4.2. *Dato U aperto connesso di \mathbb{C} , ogni coppia di punti di U è connessa per archi da una spezzata con lati paralleli agli assi.*

Dimostrazione. (**Lemma 4.4.2**) Siano $z_0 \in U$ e $W = \{z \in U \mid \exists \text{ curva spezzata con lati paralleli agli assi che unisce } z_0 \text{ e } z\}$. Chiaramente $z_0 \in W \implies W \neq \emptyset$.

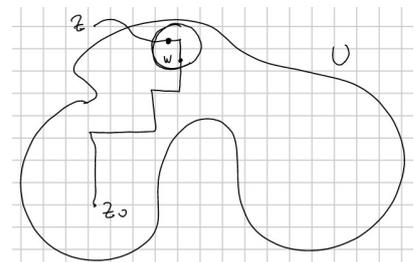
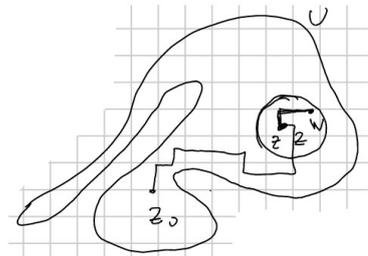
Vediamo che W è aperto: siano $z \in W$ e $B(z, R) \subseteq U$.

Osserviamo dunque che $B(z, R) \subseteq W$.

Vediamo che W è chiuso in U : sia $z \in \overline{W} \cap U$. Visto che $z \in U$, $B(z, R) \subseteq U$ e, poiché $z \in \overline{W}$, $\exists w \in B(z, R) \cap W$.

Quindi esiste una spezzata con lati paralleli agli assi che unisce z_0 a w e la concatenata con due lati che uniscono z e w .

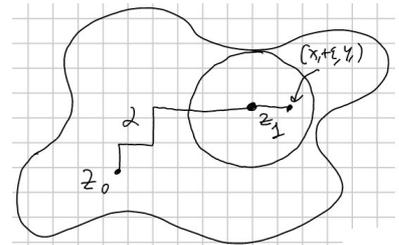
Dunque, dato che U è connesso e W è sia aperto che chiuso in U , segue che $W = U$. \square



Vogliamo quindi dimostrare che $\omega = df$. Dimostriamolo per ogni componente connessa V di U .

Sia $z_0 \in V$ e definiamo, per $z \in V$, $f(z) = \int_{\alpha} \omega$, dove α è una curva spezzata con lati paralleli agli assi che unisce z_0 e z . Per ipotesi, la definizione di f non dipende dalla curva scelta e il **Lemma 4.4.2** ci dice che una tale curva esiste. Dobbiamo quindi dimostrare che $df = \omega$, con $\omega = a dx + b dy$, cioè che $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = b$.

Vediamo $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ (l'altra è analoga).



¹⁷Per definizione di $\int_{\beta} \omega$.

Dobbiamo vedere che $\frac{\partial f}{\partial x}(z_1) = a(z_1)$, con $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \varepsilon, y_1) - f(x_1, y_1)}{\varepsilon}$$

$f(x_1, y_1) = \int_{\alpha} \omega$ e $f(x_1 + \varepsilon, y_1) = \int_{\alpha} \omega + \int_{\alpha_{\varepsilon}} \omega$, dove $\alpha_{\varepsilon}(t) = (x_1 + t, y_1)$ per $0 \leq t \leq \varepsilon$. Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha_{\varepsilon}} \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \omega_{\alpha_{\varepsilon}(t)}[\alpha'_{\varepsilon}(t)] dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} a(x_1 + t, y_1) dt = a(x_1, y_1)$$

□

Osservazione 115. Se $U = B(0, R)$, allora possiamo sostituire l'affermazione 4) con la seguente

4') $\int_{\alpha} \omega = 0$ per ogni α che percorre il perimetro di un rettangolo con lati paralleli agli assi.

Dimostrazione. Per **Esercizio**.

Osservazione 116. Se U è semplicemente connesso e ω è chiusa, allora ω è esatta.

Dimostrazione. Data α curva C^1 a tratti, abbiamo che $\alpha \sim pt$, cioè è una curva costante, quindi, per il **Teorema 4.4.1**,

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{pt} \omega = 0$$

dunque ω è esatta.

□

4.5 Teorema di Cauchy

Teorema 4.5.1 (Cauchy).

Se U è un aperto di \mathbb{C} e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora $f(z) dz = \omega$ è una 1-forma chiusa.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\forall z_0 \exists V$ intorno di z_0 tale che $f(z) dz$ è esatta in V .

Sia dunque $V = B(z_0, R)$. Dimostriamo che $\int_{\alpha} f(z) dz = 0 \forall \alpha$ curva che descrive il bordo di un rettangolo con lati paralleli agli assi. Sia $\alpha = \partial R$: dimostriamo che $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$. Per assurdo, $\int_{\partial R} f(z) dz = A \neq 0$, con $|A| > 0$.

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R^I} f(z) dz + \int_{\partial R^{II}} f(z) dz + \int_{\partial R^{III}} f(z) dz + \int_{\partial R^{IV}} f(z) dz$$

Infatti, gli integrali lungo i lati interni si semplificano. Dunque

$$|A| \leq \left| \int_{\partial R^I} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial R^{II}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial R^{III}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial R^{IV}} f(z) dz \right|$$

Per almeno uno dei rettangolini (senza perdita di generalità, prendiamo R^I) avremo

$$\left| \int_{\partial R^I} f(z) dz \right| \geq \frac{|A|}{4}$$

Chiamiamo $R_0 = R$, $R_1 = R^I$, ... e iteriamo questo procedimento: troviamo una successione di rettangolini R_n uno dentro l'altro (costruiti come R^I) tali che

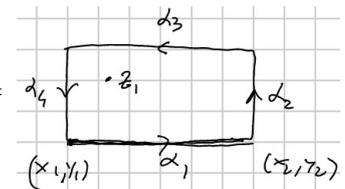
$$\left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| \geq \frac{|A|}{4^n}$$

Poiché $R_n = \bigcap_{i=1}^n R_i \neq \emptyset$, per compattezza, $\bigcap_{i=0}^{\infty} R_i \neq \emptyset$. Sia dunque $U \ni z_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$. f è olomorfa in z_1 , quindi

$$f(z) = f(z_1) + f'(z_1)(z - z_1) + \rho(z - z_1), \text{ con } \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{\rho(z - z_1)}{\|z - z_1\|} = 0$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\partial R_n} f(z) dz &= \int_{\partial R_n} f(z_1) + f'(z_1)(z - z_1) + \rho(z - z_1) dz = \\ &= \underbrace{\int_{\partial R_n} f(z_1) dz}_0 + \underbrace{\int_{\partial R_n} f'(z_1)(z - z_1) dz}_0 + \int_{\partial R_n} \rho(z - z_1) dz = \\ &= \int_{\partial R_n} \rho(z - z_1) dz = \text{“somma di 4 pezzi”} \end{aligned}$$



Vediamo quindi che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_1} \rho(z - z_1) dz \right| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \rho(\alpha(t) - z_1) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |\rho(\alpha(t) - z_1)| dt = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \|\alpha(t) - z_1\| \cdot |\sigma(\alpha(t) - z_1)| dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dove $\sigma(z) = \frac{\|\rho(z - z_1)\|}{\|z - z_1\|}$ è tale che $\lim_{z \rightarrow z_1} \sigma(z) = 0$.

Detto P il perimetro di R , R_n ha perimetro $\frac{P}{2^n}$ e $\|z - z_1\| \leq P_n \leq \frac{P}{2^n}$ per $z \in P_n$.

$$\left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha_1} f(z) dz + \int_{\alpha_2} f(z) dz + \int_{\alpha_3} f(z) dz + \int_{\alpha_4} f(z) dz \right|$$

Supponiamo che, per $n > N$, valga $\sigma(z - z_1) \leq \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ e $z \in R_n$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \|\alpha(t) - z_1\| \cdot |\sigma(\alpha(t) - z_1)| dt \leq P_n \cdot P_n \varepsilon$$

$$\left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| \leq 4P_n^2 \varepsilon = 4 \frac{P^2}{4^n} \varepsilon <^{18} \frac{|A|}{4^n} \leq \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| \frac{1}{4}$$

□

Teorema 4.5.2 (Cauchy).

Se U è un aperto di \mathbb{C} e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è continua e olomorfa in $U \setminus \{\text{retta } s \text{ parallela all'asse } x\}$, allora $f(z) dz$ è una 1-forma chiusa.

Dimostrazione. Scegliamo $V = B(z_0, r)$ come sopra e dimostriamo che $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ per ogni rettangolo $R \subseteq V$ con i lati paralleli agli assi.

Primo caso: R non interseca s .

Lo abbiamo già dimostrato.

Secondo caso: un lato di R è contenuto in s .

Sia R_ε un rettangolo un po' più piccolo di R come in figura (ci fermiamo a distanza ε da s).

Dimostriamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial R} f(z) dz$$

da cui segue, sapendo dal *Primo caso* che $\int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz = 0$, anche $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$.

Notiamo intanto che

$$\int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz = \int_0^{x_2-x_1} f(x_1+t, y_1+\varepsilon) dt \quad \text{e} \quad \int_{\partial R} f(z) dz = \int_0^{x_2-x_1} f(x_1+t, y_1) dt$$

Sia dunque $g(x, y) = f(x, y) - f(x, y_1)$, perciò

$$g(x_1+t, y_1+\varepsilon) = f(x_1+t, y_1+\varepsilon) - f(x_1+t, y_1)$$

e basta quindi dimostrare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{x_2-x_1} g(x_1+t, y_1+\varepsilon) dt = 0$$

Osserviamo che $g(x, y) = 0$ su $y = y_1$ e, in particolare, su $[x_1, x_2] \times \{y_1\}$ che è compatto.

Dunque $\forall \delta > 0 \exists \rho > 0$ tale che $|g(p)| < \delta$ per $p \in (x_1 - \rho, x_2 + \rho) \times (y_1 - \rho, y_1 + \rho)$.

Quindi per $0 < \varepsilon < \rho$, abbiamo

$$\left| \int_0^{x_2-x_1} g(x_1+t, y_1+\varepsilon) dt \right| < (x_2-x_1)\delta \implies \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{x_2-x_1} g(x_1+t, y_1+\varepsilon) dt \right| < (x_2-x_1)\delta$$

Quindi, per arbitrarietà di $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{x_2-x_1} g(x_1+t, y_1+\varepsilon) dt = 0$$

Terzo caso: s divide R in due parti.

Siano R_1 la parte superiore e R_2 quella inferiore:

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R_1} f(z) dz + \int_{\partial R_2} f(z) dz$$

¹⁸Se ε è abbastanza piccolo.

Poiché l'integrale lungo il lato in comune (quello su s) si semplifica, per il *Secondo caso*,

$$\int_{\partial R_1} f(z) dz = \int_{\partial R_2} f(z) dz = 0 \implies \int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

□

Definizione 4.5.1. Dati α una curva chiusa C^1 a tratti in \mathbb{C} e z_0 che non sia nell'immagine di α , l'indice di avvolgimento di α attorno a z_0 è

$$\text{Ind}(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0}$$

Teorema 4.5.3 (Formula integrale di Cauchy).

Siano U un aperto di \mathbb{C} e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Se inoltre α è una curva C^1 a tratti chiusa che in U è omotopa alla curva costante (cioè un punto) e $z_0 \in U$ tale che $z_0 \notin \text{Imm } \alpha$, allora

$$\text{Ind}(\alpha, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dimostrazione. Sia $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$. Poiché f è olomorfa, segue che:

① g è continua;

② g è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$.

Quindi, $g(z) dz$ è una 1-forma chiusa.

Adesso vogliamo calcolare

$$\int_{\alpha} g(z) dz = \int_{pt} g(z) dz = 0$$

perché $\alpha \sim pt$ in U . Dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Ovvero, abbiamo verificato che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0) \text{Ind}(\alpha, z_0)$$

□

Teorema 4.5.4. Siano $B = B(z_0, R)$ palla aperta e $h : \partial B \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ è tale che $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{h(w)}{w-z} dw$, in cui $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ è tale che $\alpha(t) = Re^{it} + z_0$, allora

1. f si esprime come una serie di potenze centrata in z_0 di raggio di convergenza R .

2. $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{h(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.

Dimostrazione. Dimostriamo la formula nel caso $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{h(w)}{w - z} dw$$

in cui $|w| = R$ e $|z| < R$. Dunque

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} h(w) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(w)}{w^{n+1}} z^n \right) dw =$$

poiché $|z| < R = |w|$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{w^{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{R^{n+1}} < +\infty$ ¹⁹ e quindi

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\alpha} \frac{h(w)}{w^{n+1}} z^n dw \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{h(w)}{w^{n+1}} dw \right)}_{a_n}$$

che è la tesi nel caso $z_0 = 0$.

Nel caso generale, $g(z) = f(z + z_0)$ si scriverà in serie di potenze centrate in 0:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{h(z + z_0)}{z^{n+1}} dz$$
²⁰

Dunque

$$f(z) = g(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{h(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$
²¹

□

Teorema 4.5.5. Se U è un aperto di \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e $\overline{B(z_0, R)} \subseteq U$, allora

① f è esprimibile come una serie di potenze centrata in z_0 con raggio di convergenza $\geq R$;

② $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$ in cui $\alpha : \begin{matrix} [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & Re^{it} + z_0 \end{matrix}$.

Dimostrazione. Per $|z - z_0| < R$, $\text{Ind}(\alpha, z) = 1$ e, per la **Formula integrale di Cauchy**,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

e poi applichiamo il **Teorema 4.5.4**.

□

Esempio 79. $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, con $|z| < 1$.

Infatti, se la guardiamo per $z \in \mathbb{R}$, allora $f(z)$ non è definita in $z = 1$ e quindi ha senso pensare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ non converga per $z \geq 1$.

Esempio 80. $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n$, con $|z| < 1$.

Infatti, è definita su tutto \mathbb{R} , ma ha singolarità in $z = \pm i$.

¹⁹Non dipende da w quindi converge uniformemente.

²⁰Qui α è centrato in 0.

²¹Qui α è centrato in z_0 .

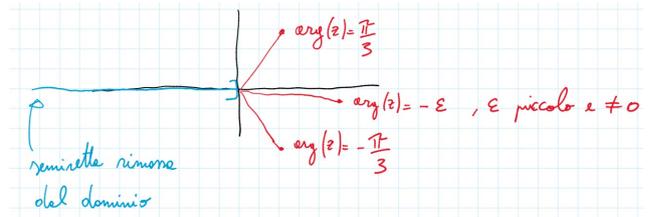
Esercizi VIII settimana

Esercizio 82 (Branca standard del logaritmo complesso).

Sia $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e sia $\mathcal{L} : U \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\mathcal{L}(z) = \log |z| + i \arg(z)$$

dove $\arg(z)$ è scelto in $(-\pi, \pi)$.



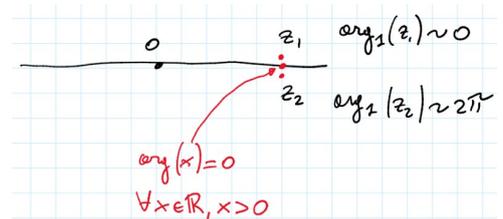
(1) Dimostrare che \mathcal{L} è continua e che $e^{\mathcal{L}(z)} = z$ per ogni $z \in U$.

Infatti,

$$e^{\mathcal{L}(z)} = e^{\log |z| + i \arg(z)} = e^{\log |z|} \cdot e^{i \arg(z)} = |z| \cdot e^{i \arg(z)} = z$$

Per vedere che \mathcal{L} sia continua, poiché $z \mapsto \log |z|$ è chiaramente continua²³, basta verificare che anche $\arg : U \rightarrow (-\pi, \pi)$ sia continua.

Caveat: $\arg_1 : \mathbb{C}^* \rightarrow [0, 2\pi)$ o $\arg_2 : \mathbb{C}^* \rightarrow [-\pi, \pi)$ **NON** sono continui: il primo è discontinuo in $x \forall x \in \mathbb{R}$ tale che $x > 0$, il secondo è discontinuo in $x \forall x \in \mathbb{R}$ tale che $x < 0$: per esempio per \arg_1 (e analogamente per \arg_2) si ha ciò che accade nel disegno a fianco.



Poiché U non contiene la semiretta reale non positiva, il “nostro” $\arg : U \rightarrow (-\pi, \pi)$ è continuo, ad esempio, perché sono continue le sue restrizioni agli aperti di questo ricoprimento fondamentale:

$U_1 = \{z \in U \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ su cui $\arg(z) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \arctan \frac{y}{x}$ ²⁴ è ovviamente continua.

$U_2 = \{z \in U \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ su cui $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}$ è ovviamente continua.

$U_3 = \{z \in U \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$ su cui $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}$ è ovviamente continua.

(2) Dimostrare che, se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua tale che $e^{f(z)} = z$ per ogni $z \in U$, allora esiste un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $f(z) = \mathcal{L}(z) + 2\pi ni$ per ogni $z \in U$.

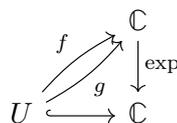
Sicuramente $e^{f(1)} = 1 \implies f(1) = 2\pi n_0 i$ per un certo $n_0 \in \mathbb{Z}$ ²⁵. Mostriamo che questo n_0 “vada bene” $\forall z \in U$, cioè $f(z) = \mathcal{L}(z) + 2\pi n_0 i \forall z \in U$. Ci sono almeno due modi semplici per vederlo:

(a) f, \mathcal{L} continue $\implies f - \mathcal{L} : U \rightarrow \mathbb{C}$ continua: $\forall z \in U$,

$$e^{f(z) - \mathcal{L}(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{\mathcal{L}(z)}} = \frac{z}{z} = 1$$

per cui $f(z) - \mathcal{L}(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, ma U è connesso e $2\pi i\mathbb{Z}$ è discreto, dunque totalmente sconnesso, per cui $f - \mathcal{L}$ è costante.

(b) Osserviamo che $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sollevano l'inclusione di U in \mathbb{C} :



²²Per definizione di argomento di un numero complesso.

²³È composizione di funzioni continue.

²⁴D'ora in poi sarà sottinteso $z = x + iy$.

²⁵Abbiamo visto che $e^z = 1 \iff z = 2\pi ni$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, $f(1) = 2\pi n_0 i$ e $g(1) = \mathcal{L}(1) + 2\pi n_0 i = 2\pi n_0 i$, per cui f e g coincidono in un punto. Essendo U connesso, dalla **Teoria dei rivestimenti** abbiamo l'unicità dei sollevamenti, per cui $f = g$, cioè $f(z) = \mathcal{L}(z) + 2\pi n_0 i \forall z \in U$.

(3) Dimostrare che \mathcal{L} è olomorfa verificando le equazioni di Cauchy-Riemann.

Vediamolo ad esempio su $U_1 = \{z \in U \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ ²⁶: $\forall z \in U_1$

$$\mathcal{L}(z) = \log |z| + i \arctan \frac{y}{x} = a(x, y) + i b(x, y)$$

con $a(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ e $b(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{\partial b}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{\partial b}{\partial y} &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Dunque effettivamente $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$ e $\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x}$ come voluto.

(4) Dimostrare che U è un dominio massimale per \mathcal{L} , ovvero che non si può estendere \mathcal{L} a un dominio più grande.

In altre parole, non esistono $U' \supsetneq U$ e $\bar{\mathcal{L}} : U' \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $\bar{\mathcal{L}}|_U = \mathcal{L}$.

Supponiamo per assurdo che un tale U' esista, dunque U' deve contenere un certo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 \leq 0$. Diciamo però che $\bar{\mathcal{L}}$ non può essere continua (né tanto meno olomorfa perciò), in x_0 . Infatti,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \bar{\mathcal{L}}(x_0 + ih) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(x_0 + ih) = \log x_0 + i\pi \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \bar{\mathcal{L}}(x_0 + ih) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \mathcal{L}(x_0 + ih) = \log x_0 - i\pi \end{aligned}$$

Mentre, se $x_0 = 0$, allora i due limiti qui sopra non sono finiti. In ogni caso, $\bar{\mathcal{L}}$ non è continua in x_0 .

(5) Per ogni $z_0 \in U$ esprimere \mathcal{L} come una serie di potenze in ogni intorno di z_0 .

Verifichiamolo su U_1 ²⁷:

$$d\mathcal{L}_{z=x+iy} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ per cui } d\mathcal{L}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Rileggendo questa uguaglianza tramite $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, abbiamo

$$\mathcal{L}'(z) = d\mathcal{L}_z(1) = d\mathcal{L}_z(1 + 0i) = d\mathcal{L}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

Dunque, supponendo che \mathcal{L} sia analitica, $\mathcal{L}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, con $a_n = \frac{\mathcal{L}^{(n)}(z_0)}{n!}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(z) &= \frac{1}{z}, & \mathcal{L}''(z) &= -\frac{1}{z^2}, & \mathcal{L}'''(z) &= \frac{2}{z^3}, \\ \mathcal{L}^{(4)}(z) &= -\frac{2 \cdot 3}{z^4}, & \dots, & & \mathcal{L}^{(n)}(z) &= (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{z^n} \end{aligned}$$

Per cui

$$\mathcal{L}^{(n)}(z_0) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{z_0^n} \implies \mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{(z - z_0)^n}{z_0^n} \quad \square$$

Alcuni punti dell'esercizio si sarebbero potuti svolgere anche diversamente (e più velocemente) usando alcuni elementi di teoria (già fatta o da fare).

²⁶Le verifiche su U_2 e U_3 sono analoghe.

²⁷Come prima, su U_2 e U_3 i calcoli sono analoghi.

Esercizio 86. (1) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ è definita da $\gamma(t) = e^{it}$.

(2) Si dimostri che la forma $\frac{dz}{z}$ è chiusa.

Dimostrazione. (2) $\frac{1}{z}$ è olomorfa, quindi $\frac{1}{z} dz$ è chiusa.

Dimostrazione alternativa. Per ogni punto esibiamo un intorno in cui la forma sia esatta, oppure, equivalentemente, ricopriamo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con aperti nei quali la forma sia esatta.

Siano $U_+ = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e $U_- = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Negli esercizi precedenti ²⁸, le funzioni olomorfe $\mathcal{L} : U_+ \rightarrow \mathbb{C}$ e $L : U_- \rightarrow \mathbb{C}$ erano due “logaritmi” possibili e, in particolare,

$$d\mathcal{L} = dL = \frac{1}{z} dz = \omega$$

(1) (Soluzione un pochino più generale: nell’**Esercizio 86** sarebbe stato $z_0 = 0$.)

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} + z_0 - z_0} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1$$

□

Osservazione 117. Sia α una qualsiasi curva C^1 a tratti chiusa in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tale che $\alpha(0) = P$. Conoscendo già $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, P) = \mathbb{Z}$, possiamo affermare che, a meno di omotopia, α è omotopa a $n\beta$, con $n \in \mathbb{Z}$, dove $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ è la curva $\beta(t) = z_0 + (p - z_0)e^{it}$ e, in particolare, poiché l’integrale è invariante per omotopia,

$$\text{Ind}(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{n\beta} \frac{dz}{z - z_0} = n$$

²⁸Vedasi **Esercizi VIII settimana, Esercizio 82** ed **Esercizio 83**.

4.6 Teorema di Liouville

Teorema 4.6.1. *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Se f è limitata, allora è costante.*

Dimostrazione. f si può esprimere come serie di potenze centrata in 0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, convergente su tutto \mathbb{C} ²⁹.

Dimostriamo che $a_n = 0 \forall n > 0$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw, \text{ con } \alpha_R(t) = Re^{it}$$

$$\implies a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{R^{n+1}(e^{it})^{n+1}} Rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{R^n e^{int}} dt$$

Poiché f è limitata, cioè $|f| \leq L$ su tutto \mathbb{C} ,

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{R^n e^{int}} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(Re^{it})}{R^n e^{int}} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{L}{R^n} dt = \frac{L}{R^n}$$

Quindi $|a_n| \leq \frac{L}{R^n} \forall R > 0$.

In particolare, $|a_n| = 0 \forall n \geq 1 \implies a_n = 0 \forall n \geq 1 \implies f(z) = a_0$, cioè f è costante. □

Corollario 4.6.2 (Teorema fondamentale dell'Algebra).

Se f è un polinomio tale che $\deg f \geq 1$, allora f ha almeno una radice.

Dimostrazione. Supponiamo che f non abbia radici: sia dunque $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ una funzione olomorfa definita su tutto \mathbb{C} .

$g(z)$ è limitata: infatti, poiché f è un polinomio di grado almeno 1, $\forall \varepsilon > 0 \exists R$ tale che, se $|z| > R$, allora $\frac{1}{|f(z)|} < \varepsilon$. Quindi, per il **Teorema di Weierstrass**, g è limitata, dunque, per il **Teorema di Liouville**, g è costante e quindi anche f è costante. □

²⁹Perché, per il **Teorema 4.5.5**, possiamo prendere la palla grande a piacere.

4.7 Principio della media

Teorema 4.7.1. Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, con U un aperto di \mathbb{C} , e $\overline{B(z_0, R)} \subseteq U$, allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it} + z_0) dt$$

Dimostrazione. Applichiamo la **Formula integrale di Cauchy** alla curva $\alpha(t) = Re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$, tale che $\text{Ind}(\alpha, z_0) = 1$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it} + z_0)}{Re^{it}} iRe^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it} + z_0) dt$$

□

4.8 Principio del massimo

Teorema 4.8.1. Data $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, con U aperto connesso di \mathbb{C} e $z_0 \in U$, se

$$|f(z_0)| = \max \{ |f(z)| : z \in U \}$$

allora f è costante.

Dimostrazione. f è analitica, quindi basta dimostrare che sia costante in un intorno di z_0 . Possiamo assumere che $f(z_0) \in \mathbb{R}_+$, altrimenti sostituiamo $f(z)$ con $Af(z)$, dove A è costante e $|A| = 1$, e osserviamo che $|Af(z)| = |f(z)|$. Scegliendo opportunamente A , possiamo assumere $Af(z_0) \in \mathbb{R}_+$. $f(z) = g(z) + ih(z)$, con g, h reali, $|f(z)| = \sqrt{g^2(z) + h^2(z)}$ e, in particolare, $|g(z)|$ è massimo in $z = z_0$: infatti, sicuramente $|g(z)| \leq |f(z)|$ e $g(z_0) = f(z_0)$. Per il **Principio della media**,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it} + z_0) dt, \quad \forall R \text{ tale che } \overline{B(z_0, R)} \subseteq U$$

che equivale a

$$\text{Re}(f(z_0)) = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(Re^{it} + z_0) dt \quad \text{e} \quad \text{Im}(f(z_0)) = h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(Re^{it} + z_0) dt$$

Dimostriamo che, se $\overline{B(z_0, R)} \subseteq U$, allora $g(Re^{it} + z_0) = g(z_0)$: per assurdo, supponiamo che $\exists R, t_0$ tali che $g(Re^{it_0} + z_0) < g(z_0)$. Perciò, per continuità, per t vicino a t_0 , $g(Re^{it} + z_0) < g(z_0)$.

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(Re^{it} + z_0) dt <^{30} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0) dt = g(z_0)$$

Assurdo, quindi $g(z) = g(z_0)$, cioè è costante in un intorno di z_0 .

Dunque, $f(z) = g(z) + ih(z)$, con $|f(z)| \leq g(z_0)$, quindi in questo intorno, $h(z) \equiv 0$.

Quindi, in un intorno di z_0 $f(z) = g(z_0)$, ma quindi, per analiticità, f è costante dappertutto. □

³⁰Visto che $g(z_0)$ è massimo, varrebbe \leq , ma in realtà vale $<$ perché $g(Re^{it} + z_0) < g(z_0)$.

4.9 Singolarità

Definizione 4.9.1. Data $B = B(z_0, R)$ palla aperta e $f : B^* = B \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, z_0 si dice **punto singolare** di f .

Vogliamo capire le differenze tra le varie “singolarità”.

Definizione 4.9.2. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$, con $a_n \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$, è detta **serie di Laurent centrata in z_0** .

Diciamo che è **convergente in z** , se sia $f_+ = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ che $f_- = \sum_{n < 0} a_n(z - z_0)^n$ convergono.

Com'è fatta la regione di convergenza di una serie di questo tipo?

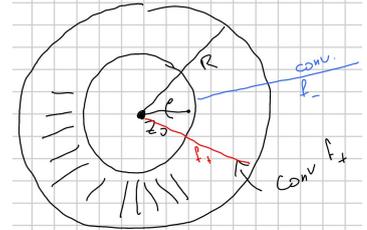
Dobbiamo capire quando convergono f_+ e f_- .

Per f_+ , $\exists R > 0$ ^a tale che f_+ converge assolutamente per $|z - z_0| < R$.

Ricordiamo anche che, per $\rho < R$, f_+ converge uniformemente in $\overline{B}(z_0, \rho)$.

Per f_- , analogamente,

$$f_- = \sum_{n < 0} a_n(z - z_0)^n = \sum_{m > 0} a_{-m} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^m$$



^aMagari $R = +\infty$.

^bQuesta serie in $w = \frac{1}{z - z_0}$ ha raggio di convergenza $\frac{1}{\rho}$.

quindi $\exists \rho \geq 0$ ³¹ tale che, per $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{\rho}$, f_- converge assolutamente, ovvero, per $|z - z_0| > \rho$, f_- converge assolutamente e inoltre, se $r > \rho$, allora la serie converge uniformemente in $|z - z_0| \geq r$.

Notazione: la corona di centro z_0 e raggi ρ, R , con $0 \leq \rho < R$, è $C(\rho, R, z_0) = \{z : \rho < |z - z_0| < R\}$.

Conclusione: una serie di Laurent converge assolutamente in una tale corona $C(\rho, R, z_0)$.

Osservazione 118. In questa **Definizione 4.9.2**, accettiamo anche $\rho = 0$ e $R = +\infty$.

Osservazione 119. Se $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ è una serie di Laurent convergente in $C(\rho, R, z_0)$, allora

1. f è olomorfa.

2. $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, in cui $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, con $\rho < r < R$ e $t \in [0, 2\pi]$.

Dimostrazione. (1.) Ponendo $f = f_+ + f_-$, f_+ è olomorfa in $|z - z_0| < R$ e f_- è olomorfa in $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{\rho}$, quindi f è olomorfa in $C(\rho, R, z_0)$.

(2.)

$$\hat{a}_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m(z - z_0)^m \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Osserviamo che lungo α convergono uniformemente sia f_+ che f_- . Dunque

$$\begin{aligned} \hat{a}_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \frac{(z_0 + re^{it} - z_0)^m}{(z_0 + re^{it} - z_0)^{n+1}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m r^{m-n} e^{it(m-n)} dt = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{m-n} \frac{a_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(m-n)} dt = r^0 \frac{a_n}{2\pi} 2\pi = a_n \end{aligned}$$

perché questi integrali sono tutti nulli tranne quello per $m = n$ che fa $\int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$. □

Osservazione 120. In particolare, l'espressione di una funzione come serie di Laurent è unica. Infatti, i suoi coefficienti si calcolano con la seguente formula:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

³¹Possibilmente proprio $\rho = 0$.

Adesso vogliamo dimostrare che tutte le funzioni olomorfe in una corona sono serie di Laurent convergenti in quella corona.

Teorema 4.9.1. *Se $0 \leq \rho < R \leq +\infty$ e $f : C(\rho, R, z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora f si esprime come una serie di Laurent convergente in questa corona.*

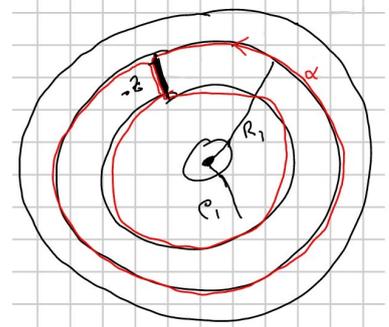
Dimostrazione. Per semplicità, assumiamo $z_0 = 0$.

Vogliamo mostrare che $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ converge assolutamente

per $\rho < |z| < R$ e $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, dove $\beta = re^{it}$, con $\rho < r < R$.

Scegliamo un cammino α al quale applicare la **Formula integrale di Cauchy (Teorema 4.5.3)**, per esempio quello in figura, e osserviamo che il tratto in direzione radiale viene percorso una volta in un senso e una volta nel senso opposto.

Applichiamo dunque la **Formula integrale di Cauchy**:



^aQuesti integrali non dipendono dal raggio scelto.

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\alpha, z)f(z) &= f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f(w)}{w-z} dw, \text{ in cui } \gamma(t) = R_1 e^{it} \text{ e } \delta(t) = \rho_1 e^{it}. \end{aligned}$$

Se vogliamo sviluppare $\frac{1}{w-z}$ lungo γ , allora

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{w^{n+1}} < +\infty, \text{ perché } |z| < R_1 = |w|.$$

Se vogliamo sviluppare $\frac{1}{w-z}$ lungo δ , allora

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{z^{n+1}} < +\infty, \text{ perché } |w| = \rho_1 < |z|$$

Adesso applichiamo di nuovo la convergenza uniforme di tali serie:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f(w)}{w-z} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{f(w)}{w^{n+1}} \right) z^n \right) dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \left(\sum_{n \geq 0} f(w) w^n \frac{1}{z^{n+1}} \right) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n \geq 0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \sum_{n < 0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n dw = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw z^n + \sum_{n < 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \end{aligned}$$

□

A noi interessa il caso in cui $\rho = 0$: $C(0, R, z_0) = B(z_0, R) \setminus \{z_0\} = B^*$. Dunque, se $f : B^* \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora z_0 è una singolarità.

Definizione 4.9.3. *Sapendo che $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ è una serie di Laurent convergente nella corona $C(0, R, z_0)$, diciamo che*

- z_0 è una **singolarità eliminabile**, se $a_n = 0$ per $n < 0$.
In questo caso f si estende a una funzione olomorfa in tutto B e $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$.

- z_0 è un **polo** di ordine k , se $a_{-k} \neq 0$ per $k > 0$ e $a_n = 0$ per $n < -k$, ovvero

$$f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^k} \underbrace{\sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^{n+k}}_{=g(z) \text{ olomorfa}} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

Osserviamo che $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$.

- Altrimenti, z_0 è una **singularità essenziale**.

Definizione 4.9.4. Dato U aperto di \mathbb{C} , una funzione f si dice **meromorfa** su U , se è definita su $U \setminus S$, con S un sottoinsieme discreto di U ³², $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ e s è una singularità eliminabile o un polo $\forall s \in S$.

Teorema 4.9.2 (Riemann-Weierstrass).

Data $f : B^* \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa,

① se $|f|$ è limitato in B^* , allora z_0 è una singularità eliminabile;

② se z_0 è una singularità essenziale, allora $f(B^*)$ è denso.

Dimostrazione. ①³³ Sappiamo che $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ è convergente in B^* e che

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \text{ con } \alpha_\varepsilon = z_0 + \varepsilon e^{it}$$

vogliamo dimostrare che $a_n = 0$ per $n < 0$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{(z_0 + \varepsilon e^{it} - z_0)^{n+1}} \varepsilon i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon^n e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi \varepsilon^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{e^{int}} dt$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi \varepsilon^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi \varepsilon^n} \int_0^{2\pi} L dt = \frac{L}{\varepsilon^n}$$

perché f è limitata, dunque $|f| \leq L$ in B^* .

Per $n = -m < 0$, $|a_{-m}| \leq \varepsilon^m \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ e quindi $|a_{-m}| = 0 \forall m > 0$, cioè $\forall n < 0$.

② Vogliamo dimostrare che $f(B^*)$ è denso. Per assurdo, supponiamo che non lo sia, cioè $\exists B(w_0, \rho)$ che non intersechi $\text{Imm } f$: $|f(w) - w_0| \geq \rho > 0$. Consideriamo dunque

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \text{ olomorfa in } B^* \text{ e tale che } |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{\rho}$$

g è limitata, quindi si estende ad una funzione olomorfa su B . Su B^* , $g(z)(f(z) - w_0) = 1$.

Essendo olomorfa, $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$, con $h(z)$ olomorfa, $h(z_0) \neq 0$ e $k = \text{ord}(g, z_0)$ ³⁴, dunque

$$(z - z_0)^k h(z)(f(z) - w_0) = 1$$

Vicino a z_0 $h(z) \neq 0$, quindi

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} \frac{1}{(z - z_0)^k} + w_0$$

Questo mostra che vicino a z_0

$$f(z) = \sum_{n \geq -k} b_n (z - z_0)^n$$

ma, vicino a z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

quindi $a_n = b_n \forall n \not\geq -k$ perché va contro al fatto che la singularità sia essenziale. □

³²Spesso, per noi, S sarà un insieme finito.

³³Molto simile alla dimostrazione del **Teorema di Liouville**.

³⁴ g non può essere $\equiv 0$.

Definizione 4.9.5. Se f è meromorfa in U aperto connesso di \mathbb{C} , ha un numero finito di zeri w_1, \dots, w_n e un numero finito di poli z_1, \dots, z_k in U , allora gli zeri di f in U contati con molteplicità sono

$$Z(f, U) = \sum_{i=1}^n \text{ord}(f, w_i) \geq 0$$

e i poli di f in U contati con molteplicità sono

$$P(f, U) = - \sum_{i=1}^m \text{ord}(f, z_i) \geq 0$$

Definendo $\text{ord}(f, z_0) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$ ³⁵, se z è uno zero, allora $\text{ord}(f, z) =$ ordine di z come zero di f , mentre, se z è un polo, $-\text{ord}(f, z) =$ ordine di z come polo di f .

Esempio 81. $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ è meromorfa su tutto \mathbb{C} , ha poli in $z = 1, 2$ e zeri in $z = 0$.
 $z = 1$:

$$f(z) = \boxed{\frac{z^2}{z-2}} \frac{1}{z-1} = (z-1)^{-1} g(z)$$

e, poiché $g(z)$ è olomorfa vicino a $z = 1$ e $g(1) \neq 0$, l'ordine di polo di f in $z = 1$ è 1 e $\text{ord}(f, 1) = -1$.
 $z = 2$: analogamente è un polo di ordine 1.

$z = 0$:

$$f(z) = z^2 \boxed{\frac{1}{(z-1)(z-2)}} = z^2 g(z)$$

e, poiché $g(z)$ è olomorfa vicino a $z = 0$ e $g(0) \neq 0$, $z = 0$ è uno zero e $\text{ord}(f, 0) = 2$.

$$Z(f) = 2$$

$$P(f) = 2$$

Infine, se siamo nella situazione precedente, allora $\text{ord}(f, U) = Z(f, U) - P(f, U)$.
 Nel nostro **Esempio 81**, $\text{ord}(f) = 2 - 2 = 0$.

³⁵Dove $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ è lo sviluppo in serie di Laurent di f .

4.10 Residuo di una funzione in un punto singolare

Definizione 4.10.1. Se $f : B^* \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, con $B^* = B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, allora $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ e il residuo di f in z_0 è

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

Domanda: perché proprio a_{-1} ?

Osservazione 121. Data una curva $\alpha = z_0 + \varepsilon e^{it}$, con $0 < \varepsilon < R$,

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-1+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz$$

Osservazione 122. Se $f : B^* \rightarrow \mathbb{C}$, con $f \not\equiv 0$, e z_0 è un polo ³⁶, allora

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \text{ con } g(z_0) \neq 0 \text{ e } g(z) \text{ olomorfa.}$$

Consideriamo la seguente forma

$$\frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{df}{f(z)}$$

e calcoliamola:

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)$$

$$\implies h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - z_0)^{k-1} g(z)}{(z - z_0)^k g(z)} + \frac{(z - z_0)^k g'(z)}{(z - z_0)^k g(z)} = k \frac{1}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad 37$$

$$\implies h(z) = \frac{k}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

$$\implies \text{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0 \right) = k = \text{ord}(f, z_0)$$

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz}$$

Teorema 4.10.1 (Residui).

Se U è un aperto di \mathbb{C} , S è l'insieme dei poli di f , con $S \subseteq U$ discreto, $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e siano $K \subseteq U$ omeomorfo ad un disco chiuso, α una curva C^1 a tratti che percorre il bordo di K in senso antiorario e $S \cap \partial K = \emptyset$, allora

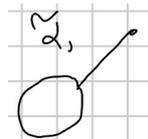
① $T = S \cap K$ è un insieme finito (cioè del tipo $T = \{t_1, \dots, t_m\}$);

② $\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz = \sum_{t \in T} \text{Res}(f, t)$.

Dimostrazione. ① S è un insieme discreto e K è un compatto, quindi $S \cap K$ è finito.

② Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ dei cerchietti attorno ai punti t_1, t_2, t_3, \dots e siano $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \dots$ tali che

$$\tilde{\alpha}_1 = \gamma_1 * \alpha_1 * \gamma_1^{-1}, \dots$$



³⁶ Oppure z_0 è una singolarità eliminabile.

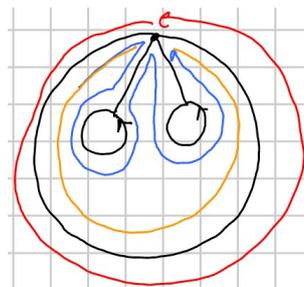
³⁷ $\frac{g'(z)}{g(z)}$ è olomorfa vicino a z_0 perché $g(z)$ è olomorfa e $g(z_0) \neq 0$.

con γ_i che va da un punto p sul bordo a uno del cerchietto descritto da α_i ^a.

$$\alpha \sim^b \tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2 * \dots * \tilde{\alpha}_m$$

dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz &= {}^c \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\alpha}_1 * \dots * \tilde{\alpha}_m} f(z) dz = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\alpha}_i} f(z) dz = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_i} f(z) dz + \int_{\alpha_i} f(z) dz - \int_{\gamma_i} f(z) dz \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_i} f(z) dz = \sum_{i=1}^m \text{Res}(f, t_i) \end{aligned}$$



^a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ le scegliamo C^1 a tratti.

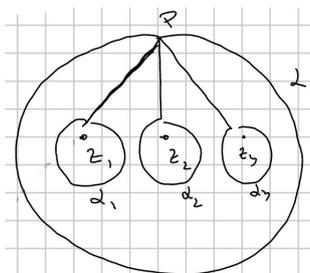
^bOmotopi come cammini in $K \setminus T$.

^cVisto che $f(z) dz$ è una forma chiusa in $K \setminus T$.

^cVisto che $f(z) dz$ è una forma chiusa in $K \setminus T$.

□

Attenzione! Presi tre punti come in figura, è vero che $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2 * \tilde{\alpha}_3$ in $D \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, ma bisogna stare attenti: $\tilde{\alpha} \not\sim \tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_3 * \tilde{\alpha}_2$ e anche i tratti γ_i che uniscono P ad $\tilde{\alpha}_i$ non possono essere presi a caso, “devono” essere proprio i segmenti uscenti da P in senso antiorario al crescere di i .



4.11 Teorema della mappa aperta

Osservazione 123. Applichiamo il **Teorema dei residui** a $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ad una f meromorfa su U .

Siano $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa, U connesso e $f \not\equiv 0$, siano inoltre S_1 l'insieme dei poli di f e S_0 l'insieme degli zeri di f . $\frac{f'(z)}{f(z)}$ è olomorfa in $U \setminus (S_1 \cup S_0)$ e ha poli nei punti di $S = S_1 \cup S_0$. Se K e α sono come nel **Teorema 4.10.1** ($\partial K \cap S = \emptyset$), allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{df}{f} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'}{f} dz = \sum_{s \in S \cap K} \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, s \right) = \sum_{s \in S \cap K} \operatorname{ord}(f, s) = \\ &= \sum_{s \in S_0 \cap K} \operatorname{ord}(f, s) + \sum_{s \in S_1 \cap K} \operatorname{ord}(f, s) = Z(f, \overset{\circ}{K}) - P(f, \overset{\circ}{K}) \end{aligned}$$

Teorema 4.11.1 (Mappa aperta).

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, U è connesso e f non è costante, allora f è un'applicazione aperta.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in U$ tale che $f(z_0) = w_0$. Vogliamo che $f(V) \supseteq$ intorno di w_0 per ogni intorno V di z_0 . Scegliamo $V = B(z_0, \varepsilon)$: vogliamo quindi dimostrare che $\exists \delta > 0$ tale che $f(V) \supseteq B(w_0, \delta)$, ovvero, vogliamo dimostrare che l'equazione $f(z) = w$, per $w \in B(w_0, \delta)$, abbia almeno una soluzione in V : $\boxed{f(z) - w = 0}$.

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^k g(z), \text{ con } k > 0, g(z_0) \neq 0 \text{ e } g(z) \text{ olomorfa}$$

In particolare

$$\operatorname{ord}(f(z) - w_0, z_0) = k > 0$$

$f(z) - w_0$ non ha altri zeri oltre z_0 in un intorno abbastanza piccolo di z_0 .

A meno di scegliere ε abbastanza piccolo, possiamo supporre che z_0 sia l'unico zero della funzione $f(z) - w_0$ in \bar{V} e, in particolare, $w_0 \notin f(\partial V) \implies \exists \delta = d(w_0, f(\partial V)) > 0$ ³⁸.

Vogliamo dunque dimostrare che, se $|w - w_0| < \delta$, allora $w \in f(V)$.

Consideriamo $f(z) - w$ e vediamo se ha degli zeri: chiamiamo $g_w := f(z) - w$

$$Z(g_w, V) = \sum_{z \in V \text{ t.c. } f(z)=w} \operatorname{Res} \left(\frac{g'_w}{g_w}, V \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{g'_w(z)}{g_w(z)} dz \stackrel{?}{>} 0$$

Dobbiamo far vedere che, se $|w - w_0| < \delta$, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{g'_w(z)}{g_w(z)} dz > 0$$

$$h(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz \in \mathbb{Z}$$

$h(w)$ è continua in w e $h(w_0) = k$ perché l'equazione $f(z) = w_0$ ha soluzione $z = z_0$.

Osserviamo che, se $|w - w_0| < \delta$, poiché $|f(z) - w_0| > \delta$, allora $f(z) - w \neq 0$.

V è una palla aperta, quindi h è costante ed è dunque sempre uguale a $k > 0$. □

³⁸Distanza tra w_0 e $f(\partial V)$.

4.12 Calcolo degli integrali definiti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

è un integrale convergente assolutamente.

Consideriamo $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx$$

dove $\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{\alpha_R} f(z) dz$, con $\alpha_R: \begin{matrix} [-R, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{matrix}$.

Se $\beta_R: \begin{matrix} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Re^{it} \end{matrix}$ e $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0 \text{ e } |z| \leq R\}$, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R * \beta_R} f(z) dz = \sum_{t \in K} \text{Res}(f, t)$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-\zeta_8)(z-\zeta_8^3)(z-\zeta_8^5)(z-\zeta_8^7)}$$

Per $R > 1$, non ci sono poli della funzione $\frac{1}{1+z^4}$ lungo la curva $\alpha_R * \beta_R$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R * \beta_R} f(z) dz = \text{Res}(f, \zeta_8) + \text{Res}(f, \zeta_8^3)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{1+R^4e^{4it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}}{1+R^4e^{4it}} dt$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_R} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{|1+R^4e^{4it}|} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{R^4-1} dt = \frac{R}{R^4-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{R}{R^4-1}$$

$$\implies \lim_{R \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_R} f(z) dz \right| = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_R} f(z) dz = \text{Res}(f, \zeta_8) + \text{Res}(f, \zeta_8^3)$$

Applicando il $\lim_{R \rightarrow +\infty}$ a quest'ultima espressione,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + 0 = \text{Res}(f, \zeta_8) + \text{Res}(f, \zeta_8^3) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i (\text{Res}(f, \zeta_8) + \text{Res}(f, \zeta_8^3))$$

Visto che $(z^4 + 1) = (z - \zeta_8)(z - \zeta_8^3)(z - \zeta_8^5)(z - \zeta_8^7) = (z - \zeta_8)g(z)$,

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{h(z)}{z-\zeta_8}, \text{ con } h(z) \text{ olomorfa vicino a } \zeta_8 \text{ e } h(\zeta_8) \neq 0$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} h_n(z-\zeta_8)^n}{z-\zeta_8} = \frac{h_0}{z-\zeta_8} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z-\zeta_8)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \implies \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \zeta_8\right) &= h_0 = h(\zeta_8) = \frac{1}{g(\zeta_8)} = \frac{1}{\zeta_8 - \zeta_8^3} \cdot \frac{1}{\zeta_8 - \zeta_8^5} \cdot \frac{1}{\zeta_8 - \zeta_8^7} = \\ &= \frac{1}{\zeta_8^3} \cdot \frac{1}{1 - \zeta_8^2} \cdot \frac{1}{1 - \zeta_8^4} \cdot \frac{1}{1 - \zeta_8^6} = \frac{1}{\zeta_8^3} \cdot \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1}{4}\zeta_8^5 = -\frac{1}{4}\zeta_8 \end{aligned}$$

Esercizi IX settimana

Esercizio 87. Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua tale che la forma $\omega = f(z) dz$ sia chiusa.

(1) Si dimostri che se F è una primitiva locale di ω allora F è olomorfa;

(2) Si dimostri che f è olomorfa.

Dimostrazione. (1) Localmente $\omega = dF$, quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = f(z) \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

perché $dF : U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e dunque $dF_P[v] = dF(P, v) = \frac{\partial F}{\partial v}(P)$. Inoltre, per definizione,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \text{ con } dz(P, w) = w \text{ e } d\bar{z}(P, w) = \bar{w}$$

$$\implies dF(P, v) = \frac{\partial F}{\partial z}(P) dz(P, v) + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(P) d\bar{z}(P, v) = \frac{\partial F}{\partial z}(P)v + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(P)\bar{v}$$

Quindi dire che $dF = f(z) dz$ corrisponde a

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = f \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases}$$

quindi F è olomorfa³⁹ e $F' = f$.

(2) Se F è olomorfa, allora F è analitica e, in particolare, $F' = f$ è olomorfa. □

In generale, quando vogliamo dimostrare che f sia olomorfa in un punto P , scegliamo un intorno $B = B(P, R)$ di P in cui $\omega = df$.

Esercizio 88. Si considerino le seguenti forme su $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\pi\}$:

$$\omega_1 = \frac{1}{z^2} dz, \quad \omega_2 = \frac{1}{e^z - 1} dz, \quad \omega_3 = \frac{1}{z} dz, \quad \omega_4 = \frac{1}{z} d\bar{z}$$

Quali di esse sono chiuse? Quali di esse sono esatte?

Dimostrazione. Per il **Teorema di Cauchy (Teorema 4.5.1)**, ω_1 e ω_2 sono chiuse.

Per l'**Esercizio 87**, ω_3 non è chiusa⁴⁰: infatti, se lo fosse, allora $\frac{1}{z}$ sarebbe olomorfa, quindi lo sarebbe anche il reciproco, cioè \bar{z} , ma, come sappiamo, non lo è.

Verifichiamo che ω_4 sia chiusa.

Osservazione 124. Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, allora $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ e

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(P + \varepsilon v) - \bar{f}(P)}{\varepsilon} = \overline{\frac{\partial f}{\partial v}(P)}$$

$$d\bar{f}_P[v] = d\bar{f}(P, v) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(P) = \overline{\frac{\partial f}{\partial v}(P)} = \overline{df(P, v)}$$

$\omega_5 := \frac{1}{z} dz$ è chiusa, quindi, localmente, $\exists f$ tale che $\omega_5 = df$.

Per quanto detto, $d\bar{f} = \frac{1}{z} d\bar{z} = \omega_4$, quindi ω_4 è chiusa.

³⁹Perché vale $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ (vedasi **Teorema 4.0.2**).

⁴⁰Dunque neanche esatta.

Reminder da Analisi: data ω 1-forma, cioè $\omega = a dx + b dy$, con $a, b : U \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni C^1 ,

$$\omega \text{ è chiusa} \iff \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

Infatti, se $\omega = df$, allora $a = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}$, dunque

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

Vediamo se $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ sono esatte.

$$\omega \text{ è esatta} \iff \forall \alpha \text{ cammino chiuso} \int_{\alpha} \omega = 0$$

Se ω è chiusa e $\alpha \sim \beta$ sono cammini chiusi omotopi, allora $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$.

Osservazione 125. *Se dimostriamo che $\int_{\alpha} \omega = 0 \forall \alpha$ che inizia e finisce in un punto P , allora questo è vero anche per ogni cammino chiuso.*

Quindi ω è esatta $\iff \forall \alpha \in \Omega(U, P, P) \int_{\alpha} \omega = 0$, con P fissato.

Inoltre, se ω è chiusa e $\alpha \sim \beta$, allora osserviamo che $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$, quindi basta verificare $\int_{\alpha} \omega = 0$ per α che varia tra i rappresentanti di $\Omega(U, P, P)/\sim = \pi_1(U, P)$.

Inoltre,

$$\int_{\alpha * \beta} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega$$

dunque basta verificare che $\int_{\alpha} \omega = 0 \forall \alpha$ rappresentante di un insieme di generatori di $\pi_1(U, P)$.
Se prendiamo $P = 1$,

$$\pi_1(U, P) = \mathbb{Z}$$

Per vedere se le forme $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ siano esatte o meno, basta calcolare

$$\int_{\alpha} \omega_i, \text{ con } \alpha(t) = e^{it} \text{ e } t \in [0, 2\pi]$$

$\omega_1 = \frac{1}{z^2} dz = d\left(-\frac{1}{z}\right)$ è chiaramente esatta, comunque

$$\int_{\alpha} \omega_1 = \int_0^{2\pi} \omega_1(\alpha(t), \alpha'(t)) dt = \int_0^{2\pi} (\omega_1)_{\alpha(t)}[\alpha'(t)] dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{it})^2} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = 0$$

oppure,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz = \text{Res}(f, 0) = 0$$

$\omega_2 = \frac{1}{e^z - 1} dz$ non è esatta, infatti, scrivendo

$$e^z - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} := zg(z), \text{ in cui } g(0) = 1$$

$$\implies \int_{\alpha} \omega_2 = \int_{\alpha} \frac{1}{zg(z)} dz \implies \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{1}{zg(z)} dz = \text{Res}\left(\frac{1}{zg(z)}, 0\right) = 1$$

perché $\frac{1}{zg(z)} = \frac{h(z)}{z}$, con $h(z) := \frac{1}{g(z)}$ olomorfa vicino a $z = 0$ ⁴¹, dunque

$$\text{Res}\left(\frac{h(z)}{z}, 0\right) = h(0) = 1$$

⁴¹Infatti, $h(0) = \frac{1}{g(0)} = 1$.

infatti $h(z) = h_0 + h_1z + h_2z^2 + h_3z^3 + \dots \implies \frac{h(z)}{z} = \frac{h_0}{z} + h_1 + h_2z + h_3z^2 + \dots$ e $h_0 = h(0) = 1$.
 Oppure, se $\alpha_\varepsilon(t) = e^{it}$ e $t \in [0, 2\pi]$, allora

$$\int_\alpha \frac{h(z)}{z} dz = \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{h(z)}{z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{i}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

Se $\omega_4 = \frac{1}{z} d\bar{z}$ fosse esatta, allora $\frac{1}{z} d\bar{z} = df$ e dunque $\frac{1}{z} dz = d\bar{f}$, ma sappiamo che questa non è esatta:

$$\int_\alpha \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

□

Esercizio 91. Siano a, b numeri reali positivi. Si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

(Suggerimento: sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una parametrizzazione del bordo dell'ellisse di centro 0 e semiassi a e b ; si consideri poi $\int_\gamma \frac{dz}{z}$.)

Dimostrazione. Sia $\alpha(t) = a \cos t + ib \sin t$, con $t \in [0, 2\pi]$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{1}{z} dz = \text{Ind}(\alpha, 0) = 1$$

$$\begin{aligned} \implies 2\pi i &= \int_\alpha \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{z} dz \right) (\alpha(t), \alpha'(t)) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha(t)} \alpha'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos t + ib \sin t} (-a \sin t + ib \cos t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos t - ib \sin t)(-a \sin t + ib \cos t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a^2 + b^2) \cos t \sin t + iab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{iab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \frac{\cos t \sin t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} (b^2 - a^2) dt \end{aligned}$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t \sin t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} (b^2 - a^2) dt = 0$$

e, soprattutto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{iab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 2\pi \implies \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}$$

□

Esercizio 17. Se U è un aperto di \mathbb{C} , $S \subseteq U$ è discreto, ω è una 1-forma chiusa su $U \setminus S$ e α è una curva chiusa in $U \setminus S$ tale che $\alpha \sim pt$ in $\Omega(U, P, P)$, dove $P = \alpha(0)$, allora

(1) $\text{Ind}(\alpha, s) \neq 0$ solo per un numero finito di $s \in S$. Sia $T = \{s_1, \dots, s_k\} = \{s \in S \mid \text{Ind}(\alpha, s) \neq 0\}$.

(2) $\forall i = 1, \dots, k$, sia α_i un cerchietto tale che $\alpha_i(t) = s_i + \varepsilon e^{it}$ attorno a s_i . Se $x_0 \in U \setminus T$, allora

$$\pi_1(U, x_0) = \pi_1(U \setminus T, x_0) / \ll \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k \gg^{42}$$

con $\tilde{\alpha}_i = \gamma_i * \alpha_i * \gamma_i^{-1}$, dove γ_i è un cammino in $U \setminus T$ tale che $\gamma_i(0) = x_0$ e $\gamma_i(1) = s_i + \varepsilon$.

(3)

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_{i=1}^k \text{Ind}(\alpha, s_i) \int_{\alpha_i} \omega$$

Dimostrazione. (1) α in U è omotopa al cammino costante:

$$H : I \times I \longrightarrow U \quad H_0 = \alpha \quad H_1 \equiv x_0$$

$\text{Imm } H =: K \subseteq U$ è compatto, α è sì omotopa a x_0 , però in K .

Poiché K è compatto e S è discreto, $K \cap S$ è finito e dimostriamo che, se $s \in S \setminus K$, allora $\text{Ind}(\alpha, s) = 0$. Infatti, se $s \in S \setminus K$, osserviamo che $\alpha \sim x_0$ come cammino in $U \setminus \{s\}$: l'omotopia è $H : I \times I \longrightarrow U \setminus \{s\}$.

(2) Lo facciamo per $k = 1$ e poi dovremmo applicare un'induzione. Sia $V = U \setminus \{s\}$: vogliamo applicare il **Teorema di Van Kampen** a $\pi_1(V)$. Siano $W = B(s, \rho)$ e $x_1 \in V \cap W$.

$$\pi_1(U, x_1) = \pi_1(W, x_1) *_{\pi_1(V \cap W, x_1)} \pi_1(V, x_1) = \pi_1(U \setminus \{s_1\}, x_1) / \ll \alpha_1 \gg$$

$$\implies \pi_1(U, x_1) = \pi_1(U \setminus \{s_1\}, x_1) / \ll \alpha_1 \gg$$

Inoltre, dati x_0 e $x_1 = s_1 + \varepsilon$,

$$\pi_1(U, x_0) = \pi_1(U \setminus \{s_1\}, x_0) / \ll \tilde{\alpha}_1 \gg$$

(3) $\alpha \sim x_0$, quindi $[\alpha]_U = [x_0] \in \pi_1(U, x_0) = \pi_1(U \setminus T, x_0) / \ll \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n \gg$.

Se $\alpha \sim x_0$ in $U \setminus T$ e ω è una forma chiusa in $U \setminus T$, allora $\int_{\alpha} \omega = 0$. In $\pi_1(U \setminus T, x_0)$

$$[\alpha]_{U \setminus T} = \underbrace{[g_1 \tilde{\alpha}_1 g_1^{-1} g_2 \tilde{\alpha}_2 g_2^{-1} g_3 \tilde{\alpha}_3 g_3^{-1} \dots g_n \tilde{\alpha}_n g_n^{-1}]}_{\beta}$$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\alpha} \omega &= \int_{\beta} \omega = \int_{g_1} \omega + \int_{\tilde{\alpha}_1} \omega + \int_{g_1^{-1}} \omega + \dots = \int_{\tilde{\alpha}_1} \omega + \int_{\tilde{\alpha}_2} \omega + \int_{\tilde{\alpha}_3} \omega + \dots + \int_{\tilde{\alpha}_n} \omega = \\ &= \int_{\alpha_{i_1}} \omega + \int_{\alpha_{i_2}} \omega + \int_{\alpha_{i_3}} \omega + \dots + \int_{\alpha_{i_n}} \omega = c_1 \int_{\alpha_1} \omega + c_2 \int_{\alpha_2} \omega + c_3 \int_{\alpha_3} \omega + \dots + c_n \int_{\alpha_n} \omega \end{aligned}$$

$$\text{Ind}(\alpha, s_1) = \text{Ind}(\beta, s_1) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_{i_j}} \frac{1}{z - s_1} dz = \sum_{j=1}^n \text{Ind}(\alpha_{i_j}, s_1)$$

Visto che

$$\text{Ind}(\alpha_i, s_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $c_1 = \text{Ind}(\alpha, s_1), \dots, c_n = \text{Ind}(\alpha, s_n)$, perciò

$$\int_{\alpha} \omega = \text{Ind}(\alpha, s_1) \int_{\alpha_1} \omega + \dots + \text{Ind}(\alpha, s_n) \int_{\alpha_n} \omega$$

□

⁴² $\ll \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k \gg$ è sottogruppo normale generato da $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k$.

Esercizi X settimana

Abbiamo visto come contare zeri e poli (con molteplicità) di una funzione meromorfa calcolando $\int_{\partial R} \frac{f'}{f} dz$. Sfruttando questo risultato dimostriamo quanto segue.

Esercizio 95 (Teorema di Rouché).

Siano U un aperto di \mathbb{C} e $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni meromorfe. Sia $K = \overline{B(z_0, R)} \subseteq U$ e supponiamo che f non abbia zeri o poli su ∂K e che $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \partial K$. Si dimostri che

$$Z_K(f) - P_K(f) = Z_K(f + g) - P_K(f + g)$$

dove Z_K e P_K indicano rispettivamente il numero di zeri e poli contati con molteplicità interni a K .

Dimostrazione. $\forall t \in [0, 1]$ sia $f_t : U \rightarrow U$ tale che $f_t(z) = f(z) + tg(z)$ cosicché $f_0 = f$ e $f_1 = f + g$. f_t , essendo somma di funzioni meromorfe, è meromorfa. Inoltre, poiché f e g non hanno poli su ∂K , anche f_t non ha poli su ∂K . Oltretutto, f_t non ha zeri su ∂K , perché, se $\exists z_0 \in \partial K$ tale che $f_t(z_0) = 0$, allora $f(z_0) = -tg(z_0) \implies |f(z_0)| = t \cdot |g(z_0)| \not\leq |f(z_0)|$ poiché $t \in [0, 1]$ e $|g(z)| < |f(z)| \forall z \in \partial K$.

Dunque, $\forall t$ possiamo applicare l'**Osservazione 123**, ottenendo

$$Z_K(f_t) - P_K(f_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz \in \mathbb{Z}$$

È evidente che $Z_K(f_t) - P_K(f_t)$ dipenda perciò in maniera continua da t (infatti, se $t_n \xrightarrow{n} \bar{t}$, allora

$$\frac{f'_{t_n}(z)}{f_{t_n}(z)} \xrightarrow{n} \frac{f'_{\bar{t}}(z)}{f_{\bar{t}}(z)} \text{ uniformemente, dunque gli integrali } \int \frac{f'_{t_n}(z)}{f_{t_n}(z)} dz \text{ tendono a } \int \frac{f'_{\bar{t}}(z)}{f_{\bar{t}}(z)} dz).$$

Essendo continua a valori nell'insieme discreto \mathbb{Z} , la funzione $t \mapsto Z_K(f_t) - P_K(f_t)$ è perciò costante, dunque

$$Z_K(f) - P_K(f) = Z_K(f_0) - P_K(f_0) = Z_K(f_1) - P_K(f_1) = Z_K(f + g) - P_K(f + g)$$

□

Esercizio 18 (2° compito a.a. 2019/2020).

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha > 1$, si mostri che $\exists! z_0 \in \mathbb{C}$, con $|z_0| < 1$, tale che $z_0 e^{\alpha - z_0} = 1$.

Dimostrazione. Ci interessano gli zeri di $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto ze^{\alpha - z} - 1$ che giacciono in $B = B(0, 1)$. Per usare il **Teorema di Rouché**, vogliamo stimare dal basso $|f(z)|$ per $z \in \partial B$ (cioè $|z| = 1$).

Anzi, facciamo una cosa più furba: poniamo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto ze^{\alpha - z}$ che è più comoda di f sia nello studio dei suoi zeri che nella stima del suo modulo e speriamo di poterla perturbare sommando $g(z) = -1$ (cioè la costante -1). A questo scopo, stimiamo $|h(z)|$ per $|z| = 1$, ottenendo

$$\begin{aligned} |h(z)| &= |ze^{\alpha - z}| = |z| \cdot |e^{\alpha - z}| = |e^{\alpha - z}| = {}^{43} |e^{\alpha - (\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{\alpha - \cos \theta} \cdot e^{-i \sin \theta}| = \\ &= |e^{\alpha - \cos \theta}| \cdot |e^{-i \sin \theta}| = |e^{\alpha - \cos \theta}| = e^{\alpha - \cos \theta} > {}^{44} 1 \end{aligned}$$

Dunque $|h(z)| > 1 \forall z \in \partial B$. Osserviamo che h è olomorfa (non ha poli), per cui, poiché, se $g(z) = -1$, allora $|g(z)| = 1 < |h(z)| \forall z \in \partial B$, possiamo applicare il **Teorema di Rouché** a h e $h + g$, ottenendo

$$Z_B(h + g) = Z_B(h)$$

ma gli zeri di $h + g$ sono esattamente le soluzioni di $ze^{\alpha - z} = 1$, che perciò (in B) sono nello stesso numero (con molteplicità) degli zeri di h , cioè delle soluzioni (con molteplicità) di $ze^{\alpha - z} = 0$.

Poiché $e^{\alpha - z} \neq 0 \forall z \in B$ (addirittura $\forall z \in \mathbb{C}$), è chiaro che $h(z) = ze^{\alpha - z}$ abbia un solo zero in B con molteplicità 1. □

⁴³ $z = \cos \theta + i \sin \theta$, poiché $|z| = 1$.

⁴⁴Poiché $\alpha > 1$, $\alpha - \cos \theta > 0$.

Esercizio 96. *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Dimostrazione. Idea: usare il **Teorema dei residui** su una funzione olomorfa che si restringe a $\frac{\sin t}{t}$ per $t \in \mathbb{R}$ oppure tale che la sua parte reale sia $\frac{\sin t}{t}$ per $t \in \mathbb{R}$.

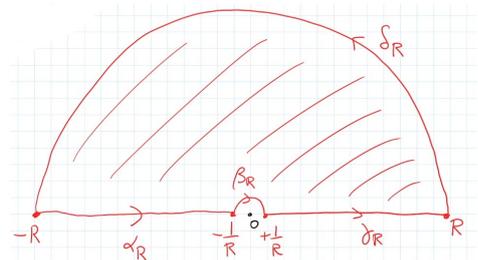
Regola empirica generale: $\cos t$ e $\sin t$ vanno spesso interpretati come parte reale o immaginaria di e^{it} e non come valore di $\cos z$ o $\sin z$ per $z \in \mathbb{R}$. Questo perché $|\cos z|$ e $|\sin z|$ vanno facilmente fuori controllo per $z \notin \mathbb{R}$ ⁴⁵. Qui prendiamo $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ e analogamente per $\sin z$, cioè $\cos z$ e $\sin z$ sono le uniche estensioni olomorfe di \sin e \cos .

Nel nostro caso pensiamo perciò $\frac{\sin t}{t}$ come parte immaginaria di $\frac{e^{it}}{t}$, cioè parte immaginaria di $\frac{e^{iz}}{z}$ quando $z \in \mathbb{R}$. Prendiamo perciò $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ e notiamo che f ha un polo proprio in 0 purtroppo. In effetti, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ non ha problemi in 0 perché $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, ma la parte reale di $\frac{e^{iz}}{z}$ per $z \in \mathbb{R}$ e $z \rightarrow 0$ diverge, essendo $\frac{\cos t}{t}$.

In ogni caso, essendo un polo, 0 non può appartenere al bordo della regione che useremo per sfruttare il **Teorema dei residui**. Consideriamo allora la regione D_R definita come in figura:

Su D_R f è olomorfa, per cui

$$\int_{\partial D_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$



ma il “mezzo giro” vicino a 0 darà un contributo di “mezzo residuo” in 0 (con segno negativo perché β_R va in senso orario). Dunque

$$\int_{\alpha_R} f(z) dz + \int_{\beta_R} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\delta_R} f(z) dz = 0$$

per cui, prendendo le parti immaginarie, anche

$$\int_{\alpha_R} \text{Im}(f(z)) dz + \int_{\beta_R} \text{Im}(f(z)) dz + \int_{\gamma_R} \text{Im}(f(z)) dz + \int_{\delta_R} \text{Im}(f(z)) dz = 0$$
⁴⁶

Per costruzione,

$$\int_{\alpha_R} \text{Im}(f(z)) dz = \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \text{Im}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) dz = \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin t}{t} dt$$

in quanto $\alpha_R : \begin{matrix} [-R, -\frac{1}{R}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{matrix}$. Analogamente, $\int_{\gamma_R} \text{Im}(f(z)) dz = \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sin t}{t} dt$.

Poiché $\frac{\sin t}{t}$ è pari,

$$\int_{\alpha_R} \text{Im}(f(z)) dz + \int_{\gamma_R} \text{Im}(f(z)) dz = 2 \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sin t}{t} dt$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\alpha_R} \text{Im}(f(z)) dz + \int_{\gamma_R} \text{Im}(f(z)) dz \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\beta_R} \text{Im}(f(z)) dz + \int_{\delta_R} \text{Im}(f(z)) dz \right) \end{aligned}$$

con $\beta_R : \begin{matrix} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{R} e^{i(\pi-t)} \end{matrix}$.

⁴⁵Ad esempio $\cos(iz) = \cosh z$.

⁴⁶Integrare una funzione a valori in \mathbb{C} significa, per definizione, integrarne parte reale e parte immaginaria, per poi ricombinare i risultati.

Ricordiamo che $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ ha $\text{Res}(f, 0) = 1$: infatti

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \frac{1}{z} \left(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots \right) = \frac{\textcircled{1}}{z} + i + \dots$$

Dunque $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$, con g olomorfa,

$$\begin{aligned} \int_{\beta_R} f(z) dz &= \int_{\beta_R} \frac{1}{z} dz + \int_{\beta_R} g(z) dz = \int_0^\pi \frac{\beta'_R(t)}{\beta_R(t)} dt + \int_0^\pi g(\beta_R(t)) \cdot \beta'_R(t) dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{\frac{e^{i(\pi-t)}}{R}} \frac{-ie^{i(\pi-t)}}{R} dt + \int_0^\pi g(\beta_R(t)) \cdot (-ie^{i(\pi-t)}) dt = -i\pi + \dots \end{aligned}$$

per $R \rightarrow +\infty$

$$\left| \int_0^\pi g(\beta_R(t)) \frac{-ie^{i(\pi-t)}}{R} dt \right| \leq \int_0^\pi |g(\beta_R(t))| \cdot \frac{1}{R} dt \leq \frac{1}{R} \int_0^\pi |g(\beta_R(t))| dt \stackrel{47}{\leq} \frac{\pi}{R} M$$

che tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$. Dunque

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\beta_R} f(z) dz = -i\pi$$

la cui parte immaginaria è $-\pi$.

$$\delta_R : \begin{array}{l} [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto Re^{it}, \text{ quindi} \end{array}$$

$$\int_{\delta_R} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} dt = \int_0^\pi ie^{iR(\cos t + i \sin t)} dt$$

Stimiamo il modulo dell'integrando:

$$\left| ie^{iR(\cos t + i \sin t)} \right| = \left| e^{iR \cos t - R \sin t} \right| = \left| e^{iR \cos t} \cdot e^{-R \sin t} \right| = \left| e^{-R \sin t} \right| = e^{-R \sin t}$$

Dunque

$$\left| \int_{\delta_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \left| ie^{iR(\cos t + i \sin t)} \right| dt \leq \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt$$

Vogliamo vedere che questa quantità tenda a 0 per $R \rightarrow +\infty$. $\forall \varepsilon > 0$ scriviamo

$$\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt = 2 \left[\int_0^\varepsilon e^{-R \sin t} dt + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \right] \leq 2 \left[\varepsilon + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \right]$$

Su $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$, $e^{-R \sin t} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ uniformemente ⁴⁸. Dunque

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt = 0$$

e perciò

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt \leq \varepsilon + 0 = \varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε , segue che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 0$$

Ricapitolando,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\text{Im} \left(\int_{\beta_R} f(z) dz \right) + \text{Im} \left(\int_{\delta_R} f(z) dz \right) \right) = -\frac{1}{2}(-\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$$

□

⁴⁷Poiché g è olomorfa, questa quantità è uniformemente limitata, ad esempio, per $R \leq 1$.

⁴⁸Perché $e^{-R \sin t} \leq e^{-R \sin \varepsilon} \forall t \in [\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$.

INDICE ANALITICO

- 1-forma, esatta, localmente esatta, chiusa, 175
- Asintoto, 34
- Azione, 106
 - di monodromia, 139
 - fedele, libera, transitiva, 106
 - vagante, propriamente discontinua, propria, 107
- Base, 49
- Bordo, 47
- Cammino, 78
- Catena, 172
- Chiusura, 47
 - proiettiva, 22
- Componente connessa, 83
 - per archi, 84
- Conica, 19
- Coordinate omogenee, 8
- Curva
 - C^1 a tratti, 175
 - affine, (ir)riducibile, 15
 - liscia, singolare, 30
 - proiettiva, 16
 - proiettivamente equivalente, 18
- Distanza, 41
 - di un punto da un sottoinsieme, 71
 - topologicamente equivalente, 44
- Dominio
 - a Fattorizzazione Unica (UFD), 15
 - fondamentale, 108
 - massimale, 172
- Embedding isometrico, 41
- Equivalenza omotopica, 120
- Fibra, 134
- Frontiera, 47
- Funtore, 86, 122
- Funzione
 - analitica, 168
 - aperta, chiusa, 61
 - continua, 42, 44
 - continua in un punto, 53
 - differenziabile, 163
 - lipschitziana, 71
 - meromorfa, 190
 - olomorfa, 165
 - propria, 100
 - uniformemente continua, 101
- Gruppo fondamentale, 125
- Identificazione, 104
- Immersione topologica, 62
- Indice di avvolgimento, 181
- Intervallo, 79
- Intorno, 53
 - ben rivestito, banalizzante, 133
- Isometria, 41
- Mappe puntate, 130
- Molteplicità, 30
 - di intersezione, 25, 26
- Nastro di Möbius, 115
- Omeomorfismo, 44, 120
 - locale, 133
- Omotopia, 119
 - di cammini, a estremi fissi, 124
 - inversa, 120
 - puntata, 130
- Orbita, 106
- Ordine di svanimento, 170

- Palla
 - aperta, 42
 - chiusa, 63
- Parte
 - affine di una curva, 22
 - interna, 47
- Poli, 191
- Polinomio omogeneo, 16
- Polo, 190
- Prebase, 50
- Prodotto
 - amalgamato, 150
 - libero, 146
- Proiezione stereografica, 92
- Prolungamento analitico, 172
- Proprietà dell'intersezione finita, 88
- Prospettività, 10
- Punto
 - aderente, di accumulazione, 47
 - all'infinito, 23
 - in posizione generale, unità, fondamentale, 6
 - non singolare, liscio, regolare, 30
 - singolare, 30, 188
- Quoziente
 - f -saturato, saturo, 104
 - aperto, chiuso, 103
- Rango
 - di un gruppo, 154
 - di una conica, 19
- Residuo, 192
- Retratto, di deformazione, retrazione, 123
- Retta di Sorgenfrey, 51, 82
- Ricoprimento, aperto, chiuso, fondamentale, 76
- Riferimento proiettivo, 6
- Rivestimento, 133
 - isomorfo, 159
 - morfismo, 157
 - regolare, 158
 - universale, 155
- Serie
 - di Laurent, 188
 - di potenze, 168
- Sezione, 166
- Sfera n -dimensionale, 92
- Singularità
 - eliminabile, 189
 - essenziale, 190
- Sistema fondamentale di intorni, 53
- Sottoinsieme
 - aperto, 42
 - sequenzialmente chiuso, chiuso per successioni, 55
- Sottospazio
 - proiettivo, generato, somma, 4
 - topologico, 57
- Spazio
 - T_0, T_1, T_2 , di Hausdorff, 69
 - T_3, T_4 , regolare, normale, 71
 - compatto, 87
 - completo, totalmente limitato, 98
 - contraibile, 121
 - delle orbite dell'azione, 106
 - denso, separabile, 51
 - I-numerabile, 53
 - II-numerabile, 51
 - localmente connesso (per archi), 84
 - metrico, 41
 - metrizzabile, 44
 - proiettivo, 1
 - sconnesso, connesso, convesso, connesso per archi, 79
 - semilocalmente semplicemente connesso, 155
 - semplicemente connesso, 132
 - sequenziale, 56
 - sequenzialmente compatto, compatto per successioni, di Lindelöf, 97
 - topologico, 43
 - totale, base, 133
 - totalmente sconnesso, 83
- Stabilizzatore, 106
- Successione, 55
 - di Cauchy, 97
- Supporto, 15, 16
- Tangente principale, 33
- Tangenza, 25, 27
- Topologia, 43
 - cofinita, 45
 - conumerabile, 54
 - della convergenza puntuale, 68
 - della semicontinuità inferiore, 69
 - di sottospazio, indotta, 57
 - di Zariski, 46
 - discreta, indiscreta, 44
 - più fine, 48
 - prodotto, 64
- Trasformazione proiettiva, 2
- Varietà topologica n -dimensionale, n -varietà topologica, 116
- Zeri, 191